



UNIVERSITEIT•STELLENBOSCH•UNIVERSITY
jou kennisvenoot • your knowledge partner

B.Sc. Honneurs
in
Wiskunde
2020

Inhoudsopgawe

1	Praktiese Inligting	1
1.1	Universiteit van Stellenbosch en Departement Wiskundige Wetenskappe	1
1.2	Graadstruktuur	1
1.3	Toelatingsvereistes	1
1.4	Vereistes om die graad te verwerf	1
1.5	Fasiliteite	1
1.6	Finansiële Ondersteuning	2
1.7	Kontakbesonderhede	2
2	Voorgestelde fokusareas vir die graad	2
2.1	Wiskunde	2
2.2	Biowiskunde	2
3	Eerstesemester-modules vir Fokus: Wiskunde	3
3.1	Algebra (711)	3
3.2	Funksionaalanalise en Maatteorie (712)	3
3.3	Reële en Komplekse Analise (713)	3
3.4	Versamelingsleer en Topologie (714)	3
4	Tweedesemester-Keusemodules vir Fokus: Wiskunde	4
5	Honneursprojek (746) vir Fokus: Wiskunde	4
5.1	Feynman se fantastiese formule vir hoërgenus-oppervlakke in die Ising-model	5
5.2	Die benadering van kwadratiese algebraïese getalle	5
5.3	Modelteorie van algebraïese afgeslote ligame en die Ax-Grothendieck stelling	5
5.4	Kategorieëse wiskunde	5
5.5	Wiskunde strukture met 'n praktiese oorsprong	5
5.6	Voorbeelde van funktore	6
5.7	Matroïdes	6
5.8	Eindige dimensionele byna-vektor ruimte konstruksies deur kopieë van 'n eindige ligame te gebruik	6

1 Praktiese Inligting

1.1 Universiteit van Stellenbosch en Departement Wiskundige Wetenskappe

Die Universiteit van Stellenbosch is geleë in 'n skilderagtige wynboustreek tussen die berge, ongeveer 50km vanaf Kaapstad. Die Universiteit het 'n trotse geskiedenis wat na 1874 terugdateer, asook 'n sterk navorsingstradisie.

Wiskunde vorm een afdeling van die Departement Wiskundige Wetenskappe. Dit is die oudste departement aan die Universiteit en het 49 voltydse akademiese personelede met aktiewe belangstellings in 'n verskeidenheid van wiskundige dissiplines. (Die ander afdelings is Toegepaste Wiskunde en Rekenaarwetenskap.) Hierdie navorsingsbelangstellings word gereflekteer in die keusemodules wat deel vorm van die leerplan van die B.Sc. Honneursgraad.

Verdere studie wat lei tot magister- en Ph.D.-grade in Wiskunde is moontlik na suksesvolle voltooiing van die honneursgraad.

1.2 Graadstruktuur

Die B.Sc. Honneursgraad in Wiskunde is 'n eenjaargraad, waartydens voltydse gestudeer word. In uitsonderlike gevalle en volgens die diskresie van die Departement van Wiskundige Wetenskappe kan die tydsduur tot twee jaar verleng word.

Studente moet modules, wat 'n totaal van 128 krediete tel (met 64 krediete in die eerste semester en 64 krediete in die tweede semester), voltooi om die graad te behaal. (Besonderhede van sommige beskikbare modules word in Afdelings 3 en 4 hieronder gegee.) Een van die modules neem die vorm van 'n navorsingsprojek van die student se keuse aan. In die eerste semester bestaan die program uit vier modules (16 krediete elk), elkeen met 'n lesinglading van drie ure per week. In die tweede semester bestaan die program uit vier modules (8 krediete elk), elkeen met 'n lesinglading van twee ure per week, asook die projek (32 krediete). Daar mag dalk ook ekstra tutoriale vir die modules geskeduleer word en baie werk word van die studente verwag buite die lesings.

Die program vir elke student sal georganiseer word om die student se agtergrond en belangstelling te akkommodeer. Onderhewig aan die Departement se goedkeuring kan 'n maksimum van die helfte van die graadkrediete in ander afdelings van die Departement of in ander departemente van die Universiteit geneem word. Die leidende beginsel is die samestelling van 'n samehangende, goedgefokusde program.

Na aanleiding van die departementele kundigheid en die loopbaan- en navorsingsmoontlikhede wat hulle voorsien, word die volgende moontlike fokusse voorgestel:

- *Wiskunde; en*
- *Biowiskunde.*

Hierdie lys dien as 'n riglyn, en voorgestelde leerplanne vir hierdie fokusareas word hieronder gegee. Die fokus wat gekies word, word nie op die graadsertifikaat gereflekteer nie; dit dien slegs om rigting aan die program te verleen.

1.3 Toelatingsvereistes

'n B.Sc.-graad met Wiskunde as hoofvak of 'n ekwivalente kwalifikasie word benodig om toegang tot die honneursprogram te verkry. 'n Punt van ten minste 60% vir Wiskunde 3 word vereis. Neem kennis dat voldoening aan hierdie basiese vereistes nie toelating waarborg nie.

Die Universiteit van Stellenbosch is 'n veeltalige universiteit. Op nagraadse vlak word die aanbiedingstaal (Afrikaans en/of Engels) oor die algemeen deur die voorkeur van die studente en die vermoëns van die dosente bepaal. Bekwaamheid in Afrikaans is nie 'n vereiste vir honneurstoelating nie, maar akademiese vaardigheid in Engels is noodsaaklik.

1.4 Vereistes om die graad te verwerf

Om die B.Sc. Honneurs graad in Wiskunde te verwerf, moet die student tenminste 50% in elke module in sy goedgekeurde program verwerf.

Indien 'n student 'n teorie gebaseerde module sak, mag die student aansoek doen om die volgende jaar daardie module te herhaal. Daar kan aansoek gedoen word om 'n maksimum van twee sulke modules te herhaal. Toelating tot die relevante module(s) in die volgende jaar is uitsluitlik volgens die diskresie van die Departement Wiskundige Wetenskappe. Die Honneursprojek module kan egter nie herhaal word nie en indien 'n student dit sak, sal die student nie die B.Sc. Honneurs graad in Wiskunde behaal nie.

1.5 Fasiliteite

Alle studente het toegang to die uitstekende fasiliteite van die Universiteit van Stellenbosch. Daar is gedeelde rekenars met e-pos- en internettoegang en studente het toegang tot die goedtoegeruste universiteitsbiblioteek.

1.6 Finansiële Ondersteuning

Alle geskikte nagraadse studente word aangemoedig om deur die Universiteit sowel as die Nasionale Navorsingstigting vir beurse aansoek te doen. Addisionele inkomste kan verdien word deur op 'n tydelike basis as 'n tutor vir voorgraadse wiskundemodules aangewend te word. Besonderhede van aansoekprosedures kan van die departementshoof of die sekretaresse van Afdeling Wiskunde verkry word.

1.7 Kontakbesonderhede

Die hoof van die Departement Wiskundige Wetenskappe is Prof. I.M. Rewitzky (rewitzky@sun.ac.za), en die hoof van Afdeling Wiskunde is Prof. L. van Wyk (lvw@sun.ac.za). Die Wiskunde Honneurs sameroeper is Dr. G. Boxall (gboxall@sun.ac.za), behalwe in die eerste semester van 2020 sal dit Dr. D. Basson (djbasson@sun.ac.za) wees. Die Biowiskunde Honneurs sameroeper is Prof. I.M. Rewitzky (rewitzky@sun.ac.za). Die sekretaresse van Afdeling Wiskunde is mev. L. Muller (lisam@sun.ac.za). Die departementele adres is:

Departement Wiskundige Wetenskappe Tel: (021) 808-3282
Afdeling Wiskunde
Universiteit van Stellenbosch
Privaatsak X1
Matieland 7602
Suid-Afrika

2 Voorgestelde fokusareas vir die graad

Die honneursprogram is buigsaam en die presiese modulekeuses in die tweede semester sal in oorleg met die individuele studente gemaak word. Die modulekeuses behoort 'n samehangende fokus aan die program te gee, en te lei tot geleenthede vir verdere studie en indiensneming. Voorgestelde leerplanne met hulle ooreenstemmende fokusse word hieronder uiteengesit.

2.1 Wiskunde

Hierdie fokus is vir studente wat 'n streng wiskunde-opleiding verlang. Dit bestaan hoofsaaklik uit modules wat in Afdeling Wiskunde aangebied word en word gewoonlik gevolg deur studente wat 'n liefde vir "suiwer wiskunde" het; in die besonder diegene wat beplan om 'n loopbaan in navorsing en/of onderrig te volg. (Die aantal krediete van elke module word in hakies gegee.)

Eerste Semester	Tweede Semester
Algebra (16) Funksionaalanalise en Maatteorie (16) Reële en Komplekse Analise (16) Versamelingsleer en Topologie (16)	vier 8-krediet Keusemodules onderhewig aan departementele goedkeuring Honneursprojek (32)

2.2 Biowiskunde

Die Biowiskundefokus is daarop gerig om studente op te lei om akkurate modelle vir eksperimentele data wat uit werklikheidsnavorsingsprobleme in die biologiese en mediese velde ontstaan, te formuleer en te analiseer, van die voorspelling van MIV, Vigs, malaria en tuberkulose, tot die effek van klimaatsverandering op Suid-Afrika. (Die aantal krediete van elke module word in hakies gegee.)

Eerste Semester	Tweede Semester
Berekenings- en Diskrete Metodes in Biowiskunde (16) Nie-lineêre Dinamiese Stelsels in Biowiskunde (16) Gevorderde Temas in Biowiskunde I (8) Gevorderde Temas in Biowiskunde II (8) Temas uit die Biologiese Wetenskappe (8) Temas uit die Biomediese Wetenskappe (8)	Honneursprojek (32) Gevorderde Onderwerpe in Biowiskunde III (16) Gevorderde Onderwerpe in Biowiskunde IV (8) Keusemodule (8)

Studente wat vir hierdie fokus registreer, sal die eerste deel van die jaar (Januarie–Junie) by AIMS (African Institute for Mathematical Sciences) deurbring, waar hulle 'n aantal spesiale modules sal volg wat deur plaaslike en internasionale kundiges in modellering van biologiese en biomediese stelsels, bevolkingsdinamika, biowiskunde en bio-informatika aangebied word. Gedurende die tweede deel van die jaar sal die studente by Universiteit van Stellenbosch

wees waar hulle projekwerk, gelei deur 'n navorser in wiskunde en een in biologiese of biomediese wetenskappe, sal doen.

3 Eerstesemester-modules vir Fokus: Wiskunde

Die modules wat in die eerste semester aangebied word, is die kernmodules vir die honneursprogram. Elke module tel 16 krediete en word in drie lesings per week deur die semester aangebied.

3.1 Algebra (711)

Die eerste en tweede kwartale word aan groepteorie en Galoisteorie onderskeidelik gewy.

In die groepteorie kursus word basiese begrippe, soos toegevoegdes, normaliseerders en normale ondergroepe bekend gestel. Daarna word verskeie voorbeelde behandel soos bv. die sirkelgroep, dihedrale groepe en die kwaternione. (Die additiewe groep van heelgetalle modulo n en ander sikliese groepe is reeds bekend gestel in die 3de-jaarskursus). Ons behandel ook die toegevoegde klasvergelykings van 'n groep, p -groepe, Cauchy se Stelling en die Sylow Stellings. Die Galoisteorie kursus bou op die liggaamsteorie van die 3de-jaar algebrakursus. Die teorie se ontstaan volg uit ondersoeke van die oplossings van polinoomvergelykings en kombineer sentrale temas van klassieke en moderne algebra. Dit is nou gekoppel aan die teorie van oplosbare groepe en sommige van die grootste wiskundiges van die laaste 200 jaar het tot die vakgebied bygedra.

Vereistes: 'n Derdejaarkursus in basiese algebra (Wiskunde 314).

Handboek: Notas sal voorsien word.

Dosente: Dr. K.T. Howell en Dr. D. Basson.

3.2 Funksionaalanalise en Maatteorie (712)

Die eerste kwartaal handel oor funksionaalanalise en die tweede kwartaal oor maatteorie.

Funksionaalanalise: Metriese en Banachruimtes, begrensde lineêre operatore, funksionale en dualruimtes. Inleiding tot Hilbertruimtes. Die Hahn Banachstelling en sy gevolge, die Baire kategoriestelling, die gelykmatige begrensheidstelling.

Maatteorie: Lebesgue buitemaat, meetbare versameling en maat, meetbare funksies, Littlewood se Beginsels. Te-kortkominge van die Riemann-integraal, die Lebesgue-integraal en konvergenSIestellings. Die L^p -ruimtes.

Vereistes: Derdejaarkursusse in komplekse analise (Wiskunde 324) en in metriese ruimtes of reële analise (Wiskunde 365).

Handboeke:

Funksionaalanalise: E. Kreyszig: *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1978.

Maatteorie: H. L. Royden: *Real Analysis*, Macmillan Publishing Co., Inc., New York, 1968.

Dosente: Prof. S. Mouton en Dr. R. Heymann.

3.3 Reële en Komplekse Analise (713)

Hierdie module is 'n voortsetting van die derdejaarmodule in komplekse analise. Onderwerpe wat behandel word sluit in Harmoniese funksies, Jensen se formule, Weierstrass-produkte, die Afbeeldingstelling van Riemann, en die gamma en zeta funksies.

Vereistes: Derdejaarkursusse in komplekse analise (Wiskunde 324) en in reële analise (Wiskunde 365).

Handboek: Notas sal voorsien word.

Dosent: Dr. S. Marques en Dr. D. Ralaivaosaona.

3.4 Versamelingsleer en Topologie (714)

In hierdie kursus sal van elke student verwag word om opdragte oor een (of meer) van die volgende gebiede in wiskunde te voltooi: aksiomatiese versamelingsleer (Zermelo-Frankel aksiomas, Zorn se lemma en die welordeningsbeginsel, kardinaal- en ordinaalrekenkunde), algemene topologie (topologie via omgewings, afsluiting en binnekant, kompaktheid, skeidingsaksiomas, kontinue funksies en homeomorfië), dualiteitsteorie (tralies en Boolese algebras, Stone, Birkhoff en Priestly dualiteite), algebraïese topologie (homotopie van paaie, definisie en berekening van fundamentele groep / groepoïed van 'n topologiese ruimte), en kategoriese topologie (basiese topologiese konstruksies beskou as limiete en kolimiete in die kategorie van topologiese ruimtes, topologiese funktore). Van studente met

'n agtergrond in sommige van hierdie areas uit hul voorgraadse studies sal verwag word om opdragte wat hulle agtergrond aanvul, te voltooi.

Vereistes: 'n Derdejaarkursus in topologie (Wiskunde 325) of reële analise (Wiskunde 365).

Handboek: Sal oor besluit word in samewerking met individuele studente.

Dosent: Prof. Z. Janelidze.

4 Tweedesemester-Keusemodules vir Fokus: Wiskunde

Modules in die tweede semester neem die vorm van *capita selecta* aan. Studente kies vier van die beskikbare 8-kredietmodules (of moontlik minder indien hulle goedgekeurde modules van ander departemente of afdelings neem). Hierdie modules word in twee lesings per week oor die semester aangebied.

Die lys van modules wat beskikbaar is, word hieronder gegee. Nie alle modules word elke jaar aangebied nie. Die presiese modules wat in 'n spesifieke jaar aangebied word, hang van die beskikbaarheid van die dosente en van die keuses van die studente af, en sodra hierdie keuses gemaak is, word die modulekodes bevestig. Daar word van studente verwag om hulle keuses van die tweede semester modules teen die einde van die eerste semester te finaliseer. Dit moet gedoen word in oorleg met die Wiskunde Honneurs sameroeper en die toepaslike dosente. Verdere inligting wat sal help met hierdie keuses sal tydens die eerste semester voorsien word.

- Algebraïese Getalleteorie (747)
- Berekeningsalgebra (748)
- Wavelet analise (749)
- Funksionaalanalise II (751)
- Maatteorie II (752)
- Kategorieteorie (753)
- Logika (754)
- Konkrete Wiskunde (755)
- Temas in Algebra (756)
- Komplekse Analise II (757)
- Gevorderde Analise (760)
- Gevorderde Abstrakte Algebra (761)
- Getalleteorie (762)
- Gevorderde Kombinatorika (767)
- Algebraïese Krommes (768)
- Algebraïese Meetkunde (769)
- Asimptotiese Metodes (771)
- Kategorie Algebra (772)
- Differensiaalmeetkunde (773)
- Funksionaalanalise III (774)
- Hilbert-ruimtes en C^* -algebras (775)
- Knoopteorie (776)
- Lie-groepe en Lie-algebras (780)
- Modelteorie (784)
- Operatorteorie (785)
- Universele Algebra (781)
- Representasieteorie (782)
- Analitiese Getalleteorie (783)

5 Honneursprojek (746) vir Fokus: Wiskunde

In die tweede semester moet alle honneursstudente 'n navorsingsprojek oor 'n onderwerp van hulle keuse voltooi. Dit sal deur middel van 'n geskrewe verslag en 'n mondelinge aanbieding aan die einde van die jaar beoordeel word. Die aanbieding vind in die laaste week van onderrig in die tweede semester plaas. Die projek tel 32 krediete.

Die lys van projekte wat beskikbaar is, verskyn hieronder. (Hierdie projekte is vir Wiskunde fokus Honneursstudente; nie vir die Biowiskunde fokus nie. Vir laasgenoemde moet die studente die Biowiskunde Honneurs sameroeper raadpleeg.)

Let wel: die volgende onderwerpe is slegs voorstelle. Studente is welkom om enige potensiële studieleiers rakende alternatiewe projekonderwerpe in die Afdeling Wiskunde te nader. Dis 'n goeie idee om vroeg in die jaar al aan die projek te dink.

5.1 Feynman se fantastiese formule vir hoërgenus-oppervlakke in die Ising-model

Die Ising-model is 'n goeiebekende model uit statistiese fisika, wat op 'n twee-dimensionele rooster gedefinieer is. Dit is interessant omdat dit 'n 'fase-oorgang' by 'n sekere kritieke temperatuur vertoon. In 1952 het Feynman besef dat die berekening van die verdelingfunksie van die Ising-model in die vlak tot 'n fassinerende lemma oor vlakgrafieke gereduseer kan word — “Feynman se fantastiese formule”. Onlangs het Cimasoni 'n hoërgenus weergawe van hierdie formule bewys, geldig vir alle grafieke (m.a.w. grafieke van hoër genus), wat spinstrukture op die oppervlak behels. Die Honneursprojek sal oor hierdie moderne topologiese bewys van die veralgemeende Feynman-formule handel.

Verwysings:

- Bruce Bartlett, Feynman's fabulous formula, *n*-category café blog post. Beskikbaar by: golem.ph.utexas.edu/category/2015/06/feynmans_fabulous_formula.html
- Dmitry Chelkak, David Cimasoni and Adrien Kassel, Revisiting the combinatorics of the 2d Ising model. Beskikbaar by: arxiv.org/abs/1507.08242.

Projekleier: Dr. B. Bartlett.

5.2 Die benadering van kwadratiese algebraïese getalle

In Diophantiese benadering bestudeer 'n mens benaderings van reële getalle α deur rasionale getalle $\frac{p}{q}$. Aangesien die rasionale getalle dig in die reële getalle lê, kan die waarde van $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$ altyd verlaag word. Maar 'n mens sal graag wil uitvind hoeveel groter jy q moet maak om dit reg te kry. Daarom vra wiskundiges vir konstantes c en n sodat

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < c \cdot q^{-n}.$$

Hoe kleiner ons c kies en hoe groter ons n kies, hoe minder oplossings p, q bestaan. 'n Mens kan dus vra op watter punt ons verander van oneindig veel na slegs eindig veel oplossings.

Daar is baie groot stellings in hierdie rigting, maar in hierdie projek wil ek hê dat die student moet fokus op die geval waar α 'n kwadratiese algebraïese getal is. In daardie geval is dit 'n stelling dat daar oneindig baie p, q is wat

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$$

bevredig. Vir meeste α is daar egter slegs eindig baie. In hierdie projek sal die student ondersoek vir watter α die ongelikheid oneindig veel oplossings het, en watter beter grense geld as daardie opsies vir α verwyder word.

Projekleier: Dr. D. Basson.

5.3 Modelteorie van algebraïese afgeslote ligame en die Ax-Grothendieck stelling

Algebraïese afgeslote ligame (soos die ligaam van komplekse getalle) is baie voorspelbaar van uit die oogpunt van modelteorie. Die hoofresultate is dat die eerste-orde teorie van algebraïese afgeslote ligame (in die taal van ringe) eliminatie van kwantifiseerders bevat en, vir enige p wat priem of nul is, die eerste-orde teorie van algebraïese afgeslote ligame van karakteristiek p volledig is. Die hoofdoel van hierdie projek is om hierdie resultate te vertoon en te wys hoe hulle gebruik word om die Ax-Grothendieck stelling te bewys. Die Ax-Grothendieck stelling beweer dat elke injektiewe polinoomfunksie van \mathbb{C}^n tot \mathbb{C}^n surjektief is. Hierdie idees kan verder gebruik word om ander toepassings te oorweeg.

Voorvereistes: Agtergrond in modelteorie (soos byvoorbeeld die derdejaar logika kursus M345).

Projekleier: Dr. G. Boxall.

5.4 Kategoriese wiskunde

Afhangende van die belangstelling van die student sal die student in hierdie projek 'n onderwerp in klassieke wiskunde vanuit die perspektief van kategorieë bestudeer.

Aanbevole module: Kategorietorie.

Projekleier: Dr. J. Gray.

5.5 Wiskunde strukture met 'n praktiese oorsprong

Die doel van hierdie projek is die ondersoek van verskillende strukture in abstrakte wiskunde wat ontstaan uit idees wat direk uit praktiese verskynsels of aktiwiteite voortkom. Hierdie projek behoort veral interessant te wees vir studente wat 'n onderwysloopbaan in wiskunde beplan.

Projekleier: Prof. Z. Janelidze.

5.6 Voorbeelde van funktore

'n Funksie beeld elemente van een versameling op elemente van 'n ander versameling af. 'n Funktor beeld wiskundige strukture en struktuurbehoudende afbeeldings van 'n gegewe soort op wiskundige strukture en struktuurbehoudende afbeeldings van 'n ander soort af. Die doel van hierdie projek is om belangrike funktore wat in verskillende gebiede van wiskunde, soos lineêre algebra, abstrakte algebra, groepteorie, topologie, algebraïese topologie, logika, ens., voorkom, te ondersoek.

Projekleier: Prof. Z. Janelidze.

5.7 Matroïdes

'n *Matroïde* is 'n abstrakte kombinatoriese struktuur. Spesifieke soorte van matroïdes is afkomstig van grafieke (op vele maniere), van sogenaamde submodulêre versameling funksies (dit is, $f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \leq f(X) + f(Y)$ word bevredig), van die kolomme van enige matriks (deur te fokus op die lineêre afhanklikheidsverhoudinge tussen hulle), van sekere tipe tralies, dit is, atomisie en semimodulêre tralies), en van baie ander scenarios. Nog meer, selfs die abstrakte konsep 'matroïde' kan gedefinieer word op 'n ongelooflike aantal gelykstaande maniere. Byvoorbeeld, 'n matroïde kan gedefinieer word as die afsluitingsoperatoor wat 'n sekere uitruil eienskap bevredig, as 'n familie van versamelings (genoem circuits) wat sekere circuitaksiomas bevredig, as 'n rang funksie op 'n magsversameling wat sekere rangaksiomas bevredig, en so voorts.

Projekleier: Prof. M. Wild.

5.8 Eindige dimensionele byna-vektor ruimte konstruksies deur kopieë van 'n eindige ligaaam te gebruik

Byna-vektor ruimtes verskil van tradisionele vektor ruimtes omdat hulle minder lineêriteit bevat. In hierdie projek sal ons ondersoek hoe eindige ligaaamsteorie gebruik word in die konstruksie van alle eindige dimensionele byna-vektor ruimtes van uit kopieë van gegewe eindige ligame. Ons sal fokus op die byna-vektor ruimtes soos oorspronklik gedefinieer deur André.

Projekleier: Dr. K.T. Howell.