UNIVERSITEIT • STELLENBOSCH • UNIVERSITY
jou kennisvennoot • your knowledge partner

*

B.Sc. Honneurs

in

Wiskunde

2015

Inhoudsopgawe

1 Praktiese Inligting

1.1 Universiteit van Stellenbosch en Departement Wiskundige Wetenskappe

Die Universiteit van Stellenbosch is geleë in 'n skilderagtige wynboustreek tussen die berge, ongeveer 50km vanaf Kaapstad. Die Universiteit het 'n trotse geskiedenis wat na 1874 terugdateer, asook 'n sterk navorsingstradisie.

Wiskunde vorm een afdeling van die Departement Wiskundige Wetenskappe. Dit is die oudste departement aan die Universiteit en het 49 voltydse akademiese personeellede met aktiewe belangstellings in 'n verskeidenheid van wiskundige dissiplines. (Die ander afdelings is Toegepaste Wiskunde en Rekenaarwetenskap.) Hierdie navorsingsbelangstellings word gereflekteer in die keusemodules wat deel vorm van die leerplan van die B.Sc. Honneursgraad.

Verdere studie wat lei tot magister- en Ph.D.-grade in Wiskunde is moontlik na suksesvolle voltooiing van die honneursgraad.

1.2 Graadstruktuur

Die B.Sc. Honneursgraad in Wiskunde is 'n eenjaargraad, waartydens voltyds op die Stellenboschkampus van die Universiteit gestudeer word.

Studente moet ten minste 9 modules, wat 'n totaal van 128 krediete tel, voltooi om die graad te behaal. (Besonderhede van die modules word in Afdelings 3 en 4 hieronder gegee.) Een van die modules neem die vorm van 'n navorsingsprojek van die student se keuse aan. Genoegsame prestasie in al die modules en 'n geweegde gemiddelde van ten minste 50% word benodig om die graad te behaal.

In die eerste semester bestaan die program uit vier modules (16 krediete elk) wat elkeen 'n lesinglading van drie uur per week het. In die tweede semester bestaan die program uit vier modules (8 krediete elk) wat elkeen 'n lesinglading van twee uur per week het, asook die projek (32 krediete).

Die program vir elke student sal georganiseer word om die student se agtergrond en belangstelling te akkommodeer. Onderhewig aan die Departement se goedkeuring kan 'n maksimum van die helfte van die graadkrediete in ander afdelings van die Departement of in ander departemente van die Universiteit geneem word. *Die leidende beginsel is die samestelling van 'n samehangende, goedgefokusde program.*

Na aanleiding van die departementele kundigheid en die loopbaan- en navorsingsmoontlikhede wat hulle voorsien, word die volgende moontlike fokusse voorgestel:

- *Wiskunde; en*
- *Biowiskunde.*

Hierdie lys dien as 'n riglyn, en voorgestelde leerplanne vir hierdie fokusareas word hieronder gegee. Die fokus wat gekies word, word nie op die graadsertifikaat gereflekteer nie; dit dien slegs om rigting aan die program te verleen.

1.3 Toelatingsvereistes

'n B.Sc.-graad met Wiskunde as hoofvak of 'n ekwivalente kwalifikasie word benodig om toegang tot die honneursprogram te verkry. 'n Punt van ten minste 60% vir Wiskunde 3 word vereis.

Die Universiteit van Stellenbosch is 'n veeltalige universiteit. Op voorgraadse vlak word die lesings hoofsaaklik in Afrikaans aangebied. Op nagraadse vlak word die aanbiedingstaal (Afrikaans en/of Engels) oor die algemeen deur die oriëntasie van die studente bepaal. Bekwaamheid in Afrikaans is nie 'n vereiste vir honneurstoelating nie, maar akademiese vaardigheid in Engels is noodsaaklik.

1.4 Fasiliteite

Alle studente het toegang to die uitstekende fasiliteite van die Universiteit van Stellenbosch. Daar is gedeelde rekenaars met e-pos- en internettoegang en studente het toegang tot die goedtoegeruste universiteitsbiblioteek.

1.5 Finansiële Ondersteuning

Alle geskikte nagraadse studente word aangemoedig om deur die Universiteit sowel as die Nasionale Navorsingstigting vir beurse aansoek te doen. Addisionele inkomste kan verdien word deur op 'n tydelike basis as 'n tutor vir voorgraadse wiskundemodules aangewend te word. Besonderhede van aansoekprosedures kan van die departementshoof of die sekretaresse van Afdeling Wiskunde verkry word.

1.6 Kontakbesonderhede

Die hoof van die Departement Wiskundige Wetenskappe is prof. I.M. Rewitzky (rewitzky@sun.ac.za), en die hoof van Afdeling Wiskunde is prof. F. Breuer (fbreuer@sun.ac.za). Die Wiskunde Honneurskoördineerder is prof. L. van Wyk

(LvW@sun.ac.za), en die sekretaresse van Afdeling Wiskunde is mev. O. Marais (omarais@sun.ac.za). Die departementele adres is:

Departement Wiskundige Wetenskappe
Afdeling Wiskunde
Universiteit van Stellenbosch
Privaatsak X1
Matieland 7602
Suid-Afrika

Tel: (021) 808-3282
Faks: (021) 808-3828

2 Voorgestelde fokusareas vir die graad

Die honneursprogram is buigsaam en die presiese modulekeuses in die tweede semester sal in oorleg met die individuele studente gemaak word. Die modulekeuses behoort 'n samehangende fokus aan die program te gee, en te lei tot geleenthede vir verdere studie en indiensneming. Voorgestelde leerplanne met hulle ooreenstemmende fokusse word hieronder uiteengesit.

2.1 Wiskunde

Hierdie fokus is vir studente wat 'n streng wiskunde-opleiding verlang. Dit bestaan hoofsaaklik uit modules wat in Afdeling Wiskunde aangebied word en word gewoonlik gevolg deur studente wat 'n liefde vir "suiwer wiskunde" het; in die besonder diegene wat beplan om 'n loopbaan in navorsing en/of onderrig te volg. (Die aantal krediete van elke module word in hakies gegee.)

Eerste Semester	**Tweede Semester**
Algebra (16) Funksionaalanalise en Maatteorie (16) Reële en Komplekse Analise (16) Versamelingsleer en Topologie (16)	vier 8-krediet Keusemodules onderhewig aan departementele goedkeuring Honneursprojek (32)

2.2 Biowiskunde

Die Biowiskundefokus is daarop gerig om studente op te lei om akkurate modelle vir eksperimentele data wat uit werklikheidsnavorsingsprobleme in die biologiese en mediese velde ontstaan, te formuleer en te analiseer, van die voorspelling van MIV, Vigs, malaria en tuberkulose, tot die effek van klimaatsverandering op Suid-Afrika. (Die aantal krediete van elke module word in hakies gegee.)

Eerste Semester	**Tweede Semester**
Berekenings- en Diskrete Metodes in Biowiskunde (16)	Honneursprojek (32)
Nie-lineêre Dinamiese Stelsels in Biowiskunde (16)	Gevorderde Onderwerpe in Biowiskunde III (16)
Gevorderde Temas in Biowiskunde I (8)	Gevorderde Onderwerpe in Biowiskunde IV (8)
Gevorderde Temas in Biowiskunde II (8)	Keusemodule (8)
Temas uit die Biologiese Wetenskappe (8)	
Temas uit die Biomediese Wetenskappe (8)	

Studente wat vir hierdie fokus registreer, sal die eerste deel van die jaar (Januarie–Junie) by AIMS (African Institute for Mathematical Sciences) deurbring, waar hulle 'n aantal spesiale modules sal volg wat deur plaaslike en internasionale kundiges in modellering van biologiese en biomediese stelsels, bevolkingsdinamika, biowiskunde en bioinformatika aangebied word. Gedurende die tweede deel van die jaar sal die studente by Universiteit van Stellenbosch wees waar hulle projekwerk, gelei deur 'n navorser in wiskunde en een in biologiese of biomediese wetenskappe, sal doen.

3 Eerstesemester-modules vir Fokus: Wiskunde

Die modules wat in die eerste semester aangebied word, is die kernmodules vir die honneursprogram. Elke module tel 16 krediete en word in drie lesings per week deur die semester aangebied.

3.1 Algebra (711)

Die eerste en tweede kwartale word aan groepteorie en Galoisteorie onderskeidelik gewy. In die groepteorie kursus word basiese begrippe, soos toegevoegdes, normaliseerders en normale ondergroepe bekend gestel. Daarna word verskeie voorbeelde behandel soos bv. die sirkelgroep, dihedrale groepe en die kwaternione. (Die additiewe groep van heelgetalle modulo n en ander sikliese groepe is reeds bekend gestel in die 3de-jaarskursus). Ons behandel ook die toegevoegde klasvergelykings van ‘n groep, p-groepe, Cauchy se Stelling en die Sylow Stellings. Die Galoisteorie kursus bou op die liggaamsteorie van die 3dejaar algebrakursus. Die teorie se ontstaan volg uit ondersoeke van die oplossings van polinoomvergelykings en kombineer sentrale temas van klassieke en moderne algebra. Dit is nou gekoppel aan die teorie van oplosbare groepe en sommige van die grootste wiskundiges van die laaste 200 jaar het tot die vakgebied bygedra.

Vereistes: ’n Derdejaarkursus in basiese algebra (Wiskunde 314).

Handboek: A. Clark: *Elements of Abstract Algebra,* Dover Publications, New York, 1984, en notas.

Dosente: Prof. L. van Wyk (Groepteorie) en prof. F. Breuer (Galoisteorie).

3.2 Funksionaalanalise en Maatteorie (712)

Funksionaalanalise: Metriese en Banachruimtes, begrensde lineêre operatore, funksionale en duaalruimtes. Inleiding tot Hilbertruimtes. Die Hahn Banachstelling en sy gevolge, die Baire kategoriestelling, die gelykmatige begrensdheidstelling.

Maatteorie: Lebesgue buitemaat, meetbare versameling en maat, meetbare funksies, Littlewood se Beginsels. Tekortkominge van die Riemann-integraal, die Lebesgue-integraal en konvergensiestellings. Die L^p-ruimtes.

Vereistes: ’n Derdejaarkursus in metriese ruimtes of reële analise (Wiskunde 365).

Handboeke:
Funksionaalanalise: E. Kreyszig: *Introductory Functional Analysis with Applications,* John Wiley & Sons Inc., New York, 1978.
Maatteorie: H. L. Royden: *Real Analysis*, Macmillan Publishing Co., Inc., New York, 1968.

Dosent: Prof. S. Mouton.

3.3 Reële en Komplekse Analise (713)

Hierdie module is ’n voortsetting van die derdejaarmodule in komplekse analise. In die proses word sommige onderwerpe uit reële analise ook behandel. Onderwerpe sluit in: konforme afbeeldings, harmoniese funksies, Dirac rye, die Riemann afbeelding stelling, analitiese voortsetting, Weierstrass produkte, Mittag-Leffler stelling, die gamma en zeta funksies.

Vereistes: ’n Derdejaarkursus in komplekse analise (Wiskunde 324).

Dosent: Dr. G. Boxall en dr. D. Ralaivaosoana.

3.4 Versamelingsleer en Topologie (714)

Hierdie kursus is hoofsaaklik gebaseer op opdragte van die volgende areas van wiskunde: aksiomatiese versamelingsleer (Zermelo-Frankel aksiomas, Zorn se lemma en die welordeningsbeginsel, kardinaal- en ordinaalrekenkunde), algemene topologie (topologie via omgewings, afsluiting en binnekant, kompaktheid, skeidingsaksiomas, kontinue funksies en homeomorfieë), dualiteitsteorie (tralies en Boolese algebras, Stone, Birkhoff en Priestly dualiteite), algebraïese topologie (homotopie van paaie, definisie en berekening van fundamentele groep / groepoïed van ’n topologiese ruimte), en kategoriese topologie (basiese topologiese konstruksies beskou as limiete en kolimiete in die kategorie van topologiese ruimtes, topologiese funktore). Van studente met ’n agtergrond in sommige van hierdie areas uit hul voorgraadse studies sal verwag word om opdragte wat hulle agtergrond aanvul, te voltooi.

Dosent: Prof. I.M. Rewitzky.

4 Tweedesemester-Keusemodules vir Fokus: Wiskunde

Modules in die tweede semester neem die vorm van *capita selecta* aan. Studente kies vier van die beskikbare 8-kredietmodules. Hierdie modules word in twee lesings per week oor die semester aangebied.

Die lys van modules wat beskikbaar is, word hieronder gegee. Nie alle modules word elke jaar aangebied nie. Die presiese modules wat in ’n spesifieke jaar aangebied word, hang van die beskikbaarheid van die dosente en van die keuses van die studente af, en sodra hierdie keuses gemaak is, word die modulekodes bevestig.

4.1 Funksionaalanalise II (751)

In hierdie kursus word verdere funksionaalanalitiese onderwerpe, insluitend spektraalteorie, behandel. Spektraalteorie is een van die hooftakke van die moderne funksionaalanalise en sy toepassings. Informeel gestel gaan dit oor sekere inverse operatore, wat op 'n natuurlike manier ontstaan in die probleem van die oplos van vergelykings (bv. differensiaal- en integraalvergelykings). Spektraalteorie kan ook as 'n veralgemening van matrikseiewaarde-teorie beskou word.

Inhoud: Toegevoegde operatore, refleksiwiteit, gelykmatige, sterk en swak konvergensie van rye van operatore, die oop afbeeldingstelling, die geslote grafiekstelling. Belangrike klasse van operatore: begrensde lineêre operatore op Banachruimtes, eindige rang en kompakte operatore, en die spektraalteorie van hierdie operatore. Teorie van Banachalgebras, spektraalteorie in Banachalgebras.

Vereiste honneursmodules: Funksionaalanalise en Maatteorie, Versamelingsleer en Topologie, Reële en Komplekse Analise.

Handboeke:
E. Kreyszig: *Introductory Functional Analysis with Applications,* John Wiley & Sons Inc., New York, 1978.
B. Aupetit: *A Primer on Spectral Theory*, Springer-Verlag, New York, 1991.

Dosent: Prof. S. Mouton.

4.2 Kategorieteorie (753)

Kategorieteorie bied 'n konseptuele organisasie van wiskunde deur die toepassing van tegnieke vir abstraksie, eenwording, en dieper begrip van parallelle verskynsels regoor die verskillende gebiede van wiskunde. Hierdie kursus sal fokus op die basiese konsepte van kategorieteorie en op die gebruik van hierdie konsepte in algebra, topologie, tralieteorie en logika.

Handboek: Notas.

Dosent: Dr. J. Gray.

4.3 Logika (754)

Hierdie module gee 'n moderne en afgeronde inleiding tot die eerste-orde logika en beslisbare fragmente daarvan. 'n Sentrale tema van die module is "logic engineering" — dié het te make met die beskouing van verskeie interpretasies (nuttig in wiskunde, toegepaste wiskunde en rekenaarwetenskap) van die basiese logiese formules, en dan die ontwikkeling ("engineering") van aksiomas en afleidingsreëls wat daardie spesifieke formules sal genereer.

Proposionele logika and eerste-orde logika voorsien die beginpunt en deurlopende tema van die module. Twee perspektiewe, sintakties en semanties, word bestudeer. Deur die eienskappe van betroubaarheid en volledigheid te bewys toon ons aan dat die bewysbare formules in die logika presies ooreenstem met die formules wat waar is onder enige interpretasie.

Hoewel die eerste-orde logika genoeg ekspressiwiteit het om, onder andere, die totaliteit van alle wiskunde sowel as enige digitale rekenaar te kan beskryf, kort dit sekere handige eienskappe soos beslisbaarheid. Daar bestaan egter wel verskeie beslisbare fragmente van eerste-orde logika met 'n groot verskeidenheid van toepassings. Sulke logikas gebaseer op modale logika word bestudeer in die tweede helfte van hierdie module. Begrippe soos modale ekspressiwiteit en volledigheid word aangebied asook gewilde uitbreidings van die basiese modale logika (soos temporale logika, hibriede logika, en meerdimensionele logika).

Die modulemateriaal bestaan uit gedrukte notas, gebaseer op verskeie navorsingsartikels, sowel as die volgende boeke:

- Blackburn, P., M. de Rijke and Y. Venema. [2001]. Modal Logic. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 53. Cambridge University Press.
- Hedman, S. [2004]. A First Course in Logic: An Introduction to Model Theory, Proof Theory, Computability and Complexity. Oxford Texts in Logic 1. Oxford: Oxford University Press.
- Mendelson, E. 1987. Introduction to Mathematical Logic. Van Nostrand. Second edition.
- Priest, G. [2001]. An Introduction to Non-Classical Logic. Cambridge University Press.

Dosent: Prof. J.W. Sanders.

4.4 Inleidende Waarderingsteorie

When studying the arithmetic of the integers of in the field of rational numbers, or in number fields in general, the primes play a key role. Similarly when studying algebraic varieties, for example curves and surfaces, local properties are determined by the points, or sub-varieties of lower dimension, such as points and curves on surfaces. In each of these situations this is done by studying a class of rings with special properties called local rings. In the typical and best possible situation (of smoothness) these rings are valuation rings. These rings, introduced by Krull in the form we will be studying, can be studied with purely algebraic tools, but with astonishing and interesting links to number theory, analysis and geometry. The aim of this course is to give a short introduction to this theory, emphasizing examples in different situations and discussing selected key results in the field.

Familiarity with the typical third year algebra course and a willingness to use or become aquainted with elementary facts from Galois Theory is prerequisite to this course.

Dosent: Prof. B.W. Green.

4.5 Kategoriese Algebra

Hierdie kursus is hoofsaaklik bedoel vir daardie studente wat graag hulle studies wil voortsit in enige gebied van suiwer wiskunde waar algebra 'n belangrike rol speel. Studente sal blootgestel word aan 'n kategorieteoretiese insig in sommige uitgesoekte resultate en konstruksies in abstrakte algebra, wat hulle begrip van algebra en sy verbindinge met ander gebiede van suiwer wiskunde sal verdiep en verbreed. Dit is raadsaam om hierdie module tesame met die Kategorieteorie- en Universele Algebramodules te neem.

'n Groot deel van hierdie module is gebaseer op die baie onlangse ontwikkelings in die gebied. Nietemin sluit dit ook sommige van die klassieke materiaal in, waar die beste naslaanwerk die volgende is: S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician* (2nd edition), Graduate Texts in Mathematics 5, 1998, Springer.

Dosent: Prof. Z. Janelidze.

4.6 Algebraïese Getalleteorie

Ek hoop dat die volgende kort opmerkings u sal aanmoedig om algebraiese getalleteorie te bestudeer, waar algebra toegepas word om probleme in getalleteorie op te los.

'n Algebraïese getalleliggaam K is 'n uitbreiding van eindige graad van die liggaam $\mathbb{Q}$ van gewone rasionale getalle. In die maklikste geval is $K = \mathbb{Q}$ die kwosientliggaam van die ring van heelgetalle $\mathbb{Z}$, wat 'n eenduidigefaktoriseringgebied is. Soortgelyk is daar in 'n algebraïese getalleligaam K 'n heeltalligering $\mathcal{O}_K$ wat net so 'n belangrike rol in die rekenkunde van K speel as $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$.

Byvoorbeeld, vir $K = \mathbb{Q}(i)$ is $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[i]$. Fermat het bewys dat die onewe priemgetalle wat 'n som van twee kwadrate is al daardie is wat $\equiv 1 \pmod 4$ is. Een manier om dit te bewys is om te faktoriseer $a^2+b^2 = (a+bi)(a-bi)$ en in $\mathbb{Z}[i]$ te bereken.

'n Vroeë poging tot 'n bewys van Fermat se Laaste Stelling, dat vir 'n heelgetal $n \geq 3$ daar geen heeltallige oplossings vir $a^n + b^n = c^n$ is nie, $abc \neq 0$, begin soos volg. Stel $\zeta = e^{2\pi i/n}$ en faktoriseer

$$a^n + b^n = \prod_{i=0}^{n-1}(a + \zeta^i b).$$

Ons neem nou aan dat die ring $\mathbb{Z}[\zeta]$ 'n eenduidigefaktoriseringgebied is om 'n teenspraak te kry. Hier is $\mathbb{Z}[\zeta]$ die heeltalligering van die sirkeldelingsliggaam $\mathbb{Q}(\zeta)$. Maar wiskundiges het gou besef dat, hoewel $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}[i]$ wel eenduidigefaktoriseringgebiede is, dit in die algemeen nie die geval vir $\mathbb{Z}[\zeta]$ is nie!

Teen ongeveer 1850 het Kummer gesien dat, alhoewel $\mathbb{Z}[\zeta]$ nie altyd 'n eenduidigefaktoriseringsgebied is nie, dit sekere goeie eienskappe het wat aansienlike vordering met Fermat se Laaste Stelling sou toelaat. Dedekind het Kummer se resultate veralgemeen om te bewys dat in die heeltalligering $\mathcal{O}_K$ van 'n getalleliggaam K daar unieke faktorisering van **ideale** as 'n produk van priemideale is, alhoewel nie vir die elemente nie. Dit is die eerste hoofresultaat in algebraïese getalleteorie.

Nog 'n klassieke stelling beskryf hoe priemideale van $\mathcal{O}_F$ faktoriseer as 'n produk van priemideale van $\mathcal{O}_K$, vir 'n uitbreiding K/F van getalleligaame. Laat byvoorbeeld $F = \mathbb{Q}$, en gestel dat $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$, waar $f(X)$ die minimale polinoom van α oor $\mathbb{Z}$ is. Laat p 'n priemgetal wees en skryf $\bar{f}(X) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ vir die polinoom wat verkry word deur die koëffisiënte van $f(X)$ te reduseer modulo p. Dan is die faktorisering van $p\mathbb{Z}$ as 'n produk van priemideale in $\mathcal{O}_K$ van dieselfde vorm as dié van $\bar{f}(X)$ as 'n produk van onherleibare polinome in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$. As ons hierdie stelling toepas vir $K = \mathbb{Q}(i)$, dan kry ons nog 'n oplossing van die probleem van watter priemgetalle 'n som van twee kwadrate is.

As 'n uitbreiding K/F van getalleliggame Galois is, dan is daar 'n baie mooi en nuttige teorie wat beskryf hoe, met 'n eindige aantal uitsonderings, die priemideale in $\mathcal{O}_K$ sogenaamde **Frobenius** elemente van die Galois groep $G(K/F)$ gee.

Dosent: Dr. A. Keet.

4.7 'n Kursus in Universele Algebra

Hierdie module beoog om 'n basiese inleiding tot die idees van universele algebra te verskaf, en is moontlik nuttig vir algemene algebra- en rekenaarwetenskapstudente. Die boek *A Course in Universal Algebra*, S. Burris and H.P

Sankapannavar, Springer 1981, is gratis verkrygbaar van http://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/ualg.html (of stuur my 'n e-pos: peter_ouwehand@sun.ac.za).

Leerplan:

- Inleiding tot tralieteorie.
- Algebras, deelalgebras and verbonde algebraïese tralies.
- Kongruensies and homomorfiese beelde.
- Produkte van algebras en direkte ontbindings.
- Subdirekte produkte and subdirekte nie-reduseerbare algebras.
- Variëteite van algebras.
- Vrye algebras.
- Vergelykingsklasse van algebras en die stelling van Birkhoff.
- Mal'cev voorwaardes.
- Boole-algebras, Boole-ringe, Boole-ruimtes and Stone dualiteit.
- Boole-magte.
- Basiese modelteorie en eerste-ordepredikaatlogika.
- Ultraprodukte en gereduseerde produkte.
- Kongruensiedistributiewe variëteite.

Vereistes: 'n Algebrakursus op derdejaarsvlak.

Dosent: Dr. P. Ouwehand.

4.8 Analitiese Getalleteorie

In hierdie module sal ons bespreek hoe reële en komplekse analise, in die besonder die studie van die analitiese eienskappe van die Riemann zeta-funksie en soortgelyke funksies, gebruik kan word om getalteoretiese probleme op te los. 'n Tipiese probleem in hierdie verband is die vraag na die "gemiddelde" of "tipiese" orde van getalteoretiese funksies (soos byvoorbeeld die aantal delers). Die hoogtepunt van die kursus sal definitief die beroemde priemgetalstelling en sy veralgemening (Dirichlet se stelling oor priemgetalle in rekenkundige rye) wees.

Handboek: Die kursus volg die boek *Introduction to Analytic Number Theory* deur T. Apostol (maar dis nie nodig om die boek te koop nie).

Vereistes: Basiese kennis van reële en komplekse analise.

Dosent: Dr. D. Ralaivaosoana.

4.9 Kommutatiewe Algebra

Die doel van die kursus is om behendigheid met die inleidende aspekte van Kommutatiewe Algebra te bereik.

Inhoud: Kommutatiewe ringe en onderringe; ideale; priem en maksimale ideale; primêre ontbinding; kwosiëntliggame; module; kettingvoorwaardes en Noetherse ringe.

Vereistes: Basiese kennis van Abstrakte Algebra, soos behandel in die eerste semester van die honneurskursus.

Handboek: R.Y. Sharp, *Steps in Commutative Algebra*, London Mathematical Society Student Texts 19, Cambridge University Press.

Dosent: Dr. C. Naude.

4.10 Onafhanklikheidsbewyse in Versamelingsleer

Hierdie is 'n kort kursus in versamelingsleer, met klem op die onafhanklikheid van die *Keuseaksioma* (AC) and the *Algemene Kontinuumhipotese* (GCH) (m.b.t. die Zermelo–Fraenkel aksiomas). Ons sal verskeie hoofstukke uit die boeke *Set Theory*, deur Thomas Jech, en *Set Theory — An Introduction to Independence Proofs*, behandel. Die voorvereistes is 'n basiese begrip van elementêre logika en versamelingsleer, insluitende ordinaalgetalle and transfiniete induksie, asook kardinaalgetalle en kardinaalrekenkunde.

Leerplan

I. **Zermelo–Fraenkel Versamelingsleer**: 'n Beknopte samevatting van die aksiomas, insluitende 'n bespreking oor die Fondamentaksioma.

II. **Modelle van Versamelingsleer**: Ons gee 'n vinnige inleiding tot die eersteordepredikaatlogika en modelteorie benodig vir onafhanklikheidsbewyse: Elementêre submodelle en skolemisasie; Löwenheim–Skolemstellings; Kompaktheidstelling; Ultraprodukte. Daarna beskou ons transitiewe modelle, en formaliseer die begrip van definieerbaarheid ter voorbereiding vir die definisie van die konstrueerbare universum L.

III. **Die Konstrueerbare Universum**: Ons gee 'n inleiding to Gödel se universum L van konstrueerbare versamelinge, toon aan dat $L \models AC + GCH$, en bewys daarmee dat AC +GCH nie-strydig met ZF is nie.

IV. **Forsering**: Forsering en generiese modelle word d.m.v. Boole-waardige modelle ingelei, en word gebruik om die onafhanklikheid van AC en GCH te bewys.

Dosent: Dr. P. Ouwehand.

4.11 Elliptiese Kurwes

Elliptiese kurwes is struktureel baie ryk voorwerpe wat gevind kan word by die oorvleueling van getalleteorie, algebraese meetkunde en komplekse analise. Dit is algebraese kurwes van genus een, en die punte op 'n elliptiese kurwe vorm 'n Abelse groep. Die subgroepe van punte gedefinieer oor verskeie liggame het baie interessante eienskappe. Die komplekse punte vorm 'n torus, en is verwant aan elliptiese funksies (vandaar die naam). Oor 'n getalleliggaam is die groep van punte eindige gegenereer (deur die Mordell-Weil Stelling), en die rang van hierdie groep is baie geheimsinnig en die onderwerp van die Birch en Swinnerton-Dyer Vermoede, een van die ses oorblywende Millennium probleme. Oor 'n eindige liggaam is die groep eindig en van groot praktiese belang vir kriptografie.

Dit sal 'n leeskursus wees, gebaseer op die boek "The Arithmetic of Elliptic Curves" deur J.H. Silverman. Ons sal begin met 'n agtergrond oor algebraese meetkunde en spesifiek die meetkunde van projektiewe algebraese kurwes, voordat ons fokus op die meetkunde van elliptiese kurwes, hul groepstruktuur en morfie tussen elliptiese kurwes. Daarna sal ons 'n seleksie van hoofstukke behandel, afhangende van die voorkeure van die studente: ellipties kurwes oor die komplekse getalle, oor eindige liggame, oor lokale liggame of oor verskeie getalleliggame.

Dosent: Prof. F. Breuer.

5 Honneursprojek (746)

In die tweede semester moet alle honneursstudente 'n navorsingsprojek oor 'n onderwerp van hulle keuse voltooi. Dit sal deur middel van 'n geskrewe verslag en 'n mondelinge aanbieding aan die einde van die jaar beoordeel word. Die projek tel 32 krediete.

Die lys van projekte wat beskikbaar is, verskyn hieronder. (Hierdie projekte is vir Wiskunde fokus Honneursstudente; nie vir die Biowiskunde fokus nie. Vir laasgenoemde moet die studente die Biowiskunde Honneurs sameroeper raadpleeg.)

5.1 Sirkulante Matrikse

'n Sirkulante matriks is 'n $n \times n$ matriks met die eienskap dat elke ry 'n sikliese skuif van die ry bokant dit is. Byvoorbeeld, die 3×3 matriks met inskrywings $[[1, 2, 3], [2, 3, 1], [3, 1, 2]]$ is 'n sirkulante matriks; netso ook die identiteitsmatriks. Hierdie matrikse, met hul oënskynlike eenvoudige definisie, het verskeie baie interessante eienskappe.

Byvoorbeeld, alle $n \times n$ sirkulante matrikse met komplekse inskrywings het dieselfde versameling ortonormale eievektore, met inskrywings wat n-de magswortels van 1 is. Hul karakteristieke polinome en eiewaardes is egter meer subtiel en interessant.

Die versameling van alle $n \times n$ komplekse sirkulante matrikse kan op verskeie interessante maniere voorgestel word. 'n Eenvoudige een: hierdie versameling vorm 'n n-dimensionele vektorruimte. Hierdie versameling kan ook die struktuur van 'n kommutatiewe C-algebra gegee word, wat isomorphic is aan $C[X]/ < x^n - 1 >$. Derdens, omdat alle $n \times n$ komplekse sirkulante matrikse diagonaliseerbaar is met dieselfde matriks van eievektore, is hierdie algebra weer isomorf aan die algebra van $n \times n$ diagonaalmatrikse.

Sirkulante matrikse het verbande met verskeie ander onderwerpe in Algebra, Getalleteorie, Algebraïese Meetkunde en Analise. Hulle kom voor oral waar wortels van 1 'n rol speel, hulle is verwant aan oplossings van polinoomvergelykings en Galois Teorie, en hulle is verwant aan die geheimsinnige 'liggaam met een element' en is selfs verwant aan Toeplitz operatore.

'n Baie oulike inleiding tot hierdie onderwerp kan in die Maart 2012 uitgawe van die 'Notices of the American Mathematical Society' gevind word, wat ook verdere verwysings bevat. Ander aspekte wat 'n student wat hierdie projek aanpak, kan ondersoek, is sirkulante matrikse oor eindige liggame en verbande met Ducci rye, Moore determinante en Carlitz modules. Dit kan ook direk aanleiding gee tot 'n M.Sc. projek.

Voorvereiste: Minstens 80% vir die Honneurs Algebra module

Projekleier: Prof. F. Breuer.

5.2 Mal'tsev Kategorieë

Die konsep van 'n Mal'tsev-kategorie neem een van die belangrike plekke in moderne kategoriese abstrakte algebra in. Hierdie idee het 'n lang geskiedenis, en sy oorsprong lê in universele algebra. Mal'tsev-kategorieë voorsien 'n gerieflike konteks waarin baie eienskappe van groepe, ringe, topologiese groepe en ander groepagtige strukture verenig kan word. Die doel van hierdie projek sal wees om sommige van die onlangse resultate van Mal'tsev-kategorieë te bestudeer, met die moontlikheid om ook nuwe resultate te verkry. Dit behoort 'n uitstekende projek te wees vir 'n student wat graag sy/haar magisterstudies in kategorieteorie, universele algebra of enige ander verwante gebied wil voortsit.

Aanbevole modules: Kategoriese Abstrakte Algebra, Kategorieteorie, Universele Algebra, Versamelingsleer.

Projekleier: Prof. Z. Janelidze.

5.3 Universele Pyle

Universele pyle speel 'n insiggewende rol in die begrip van baie fundamentele konsepte en konstruksies van moderne wiskunde. Cartesiese produkte van versamelings, groepe en alle ander wiskundige strukture, vrye groepe, monoïede en ander vrye strukture, kwosiëntstrukture, ens. — almal kan deur middel van universele pyle gedefinieer word. Dit lei tot die idees van limiete in kategorieë en adjunkte funktore tussen kategorieë, en die hooftema van hierdie projek sal wees om hierdie twee diep konsepte, tesame met voorbeelde, te bestudeer. Die projek is in die besonder geskik vir studente wat graag 'n algemene idee wil kry van hoe konsepte en konstruksies in verskillende takke van abstrakte wiskunde met mekaar verband hou.

Aanbevole modules: Kategorieteorie, Versamelingsleer, Algebra, Topologie, Logika, Universele Algebra, Kategoriese Abstrakte Algebra.

Projekleier: Prof. Z. Janelidze.

5.4 Tropiese Algebra

In Julie 2004, het Bernd Sturmfeld in Park City, Utah, 'n lesing gegee met die titel: "The tropical approach in Mathematics."Die tipe wiskunde was op daardie tydstip in sy kinderskoene, maar het sedertdien gegroei tot 'n integrale deel van Meetkundige Kombinatorika en Algebraiese Meetkunde. Dit het ook uitgebrei in Wiskundige Fisika, Getalleteorie, Wiskundige Biologie en ander rigtings.

Die basiese doel van die projek sal die bestudering van die tropiese semi-ring $(\mathbb{R}\cup\infty, \oplus, \Box)$ wees. As 'n versameling is dit net die reële getalle, met 'n ekstra element ∞. Die basiese operasies van optelling en vermenigvuldiging van reële getalle word geherdefinieer as volg:

$$x \oplus y = \min(x; y); \qquad x \Box y = x + y$$

In hierdie projek sal die student 'n elementêre inleiding tot die gebied gee en raak aan die polinome, krommes, lineêre ruimtes en phylogenetika.

Projekleier: Dr. C. Naude.

5.5 Skakeling van strukture deur middel van dualiteitsteorie

'n Belangrike onderneming in baie wiskundetakke is die translasie van konsepte, stellings of wiskundige strukture in een konteks na ander konsepte, stellings of strukture in 'n verskillende konteks op 'n eenduidige manier. Dualiteitsteorie is 'n stuk wiskundige gereedskap wat vir hierdie proses gebruik word.

In hierdie projek sal u met die basiese beginsels van dualiteitsteorie kennis maak en dualiteite vir kompakte Hausdorffruimtes bestudeer, insluitende Stone-dualiteit en Gelfand-dualiteit.

Aanbevole modules: Versamelingsleer en Topologie, Universele Algebra.

Projekleier: Prof. I.M. Rewitzky.

5.6 Van der Waerden se Stelling

Aanvaar dat alle heelgetalle met n verskillende kleure gekleur word. Dan geld van der Waerden se stelling:

Vir enige positiewe heelgetal k bestaan daar 'n rekenkundige ry met lengte k waarvan alle elemente dieselfde kleur het.

Die doel van hierdie projek is om die bewys van van der Waerden se verrassende resultaat te bespreek, en om soortgelyke probleme en veralgemenings te behandel.

Projekleier: Prof. S. Wagner.

5.7 Partisie-identiteite en kongruensies

'n Partisie van 'n heelgetal n is 'n manier om n as 'n som positiewe heelgetalle te skryf.

Ons kan, byvoorbeeld, 5 skryf as

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Partisies het verskillende interessante eienskappe: byvoorbeeld is die aantal partisies van 'n heelgetal n waarin al die terme onewe is, gelyk aan die aantal verdelings van n waarvan al die dele verskillend is. Volgens 'n beroemde stelling deur Ramanujan is die aantal partisies van $5m + 4$ altyd deelbaar deur 5. Hierdie is net twee voorbeelde van 'n groot aantal eienskappe (daar is genoeg vir vyf honneursprojekte), en daar is ook samehang tussen partisies en die teorie van elliptiese funksies en modulêre vorme.

Projekleier: Prof. S. Wagner.

5.8 Heelgetal-komposisies

'n Komposisie (samestelling) van 'n heelgetal n is 'n manier om dit as 'n geordende som van heelgetalle te skryf, bv.:

$$4 = 3 + 1 = 1 + 3 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

Dis 'n klassieke kombinatoriese resultaat dat n presies 2^{n-1} komposisies het. Die doel van hierdie projek sal wees om verskillende statistiese eienskappe van komposisies op te som, soos byvoorbeeld: gemiddelde lengte, verdeling van terme (hoeveel 1e, hoeveel 2s, ens.), maksimum, om net 'n paar te noem.

Projekleier: Prof. S. Wagner.

5.9 Die "dimer model" in statistiese fisika

Beskou 'n $m \times n$-rooster (n ewe). Op hoeveel maniere kan die mn punte (beskou hulle as atome) in $mn/2$ pare verdeel word sodat twee punte wat 'n paar vorm altyd horisontaal of vertikaal verbind is (bindings tussen atome)? In grafiek-teoretiese terme: hoeveel perfekte afparings van die $m \times n$-rooster is daar? Nog 'n ander ekwivalente formulering is: op hoeveel maniere kan 'n $m \times n$-reghoek met nie-oorvleuelende 1×2-stukke bedek word? Die verrassende antwoord, wat deur die fisikus Kasteleyn gevind is, lyk soos volg:

$$\prod_{k=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} \prod_{l=1}^{n/2} \left(4\cos^2 \frac{\pi k}{m+1} + 4\cos^2 \frac{\pi l}{n+1} \right).$$

Die bewys maak gebruik van 'n aantal slim argumente wat kombinatorika, grafiekteorie en lineêre algebra kombineer (bv., die Pfaffiaan van 'n matriks).

Projekleier: Prof. S. Wagner.

5.10 Jacobi se Drievoudige Produk

Jacobi se gevierde drievoudige produk druk 'n reeks uit as 'n produk van 3 terme. Dit is relevant in verskeie vertakkinge van wiskunde. Daar bestaan baie bewyse hiervoor. Sommige daarvan het 'n kombinatoriese (bijectiewe) geur. Die taak is om hierdie bewyse te versamel en dit op 'n aantreklike manier aan te bied.

Projekleier: Prof. H. Prodinger.

5.11 Benaderde Telling

This is a procedure to count a population in an approximate fashion. The pioneering paper about it was written by Philippe Flajolet. The analysis leads to many fascinating things, involving generating functions, q-analysis, asymptotic techniques. The task is to digest the literature and present it in a coherent way.

Dit is 'n prosedure om 'n bevolking op 'n benaderde manier te tel. Die baanbrekersartikel hieroor is geskryf deur Philippe Flajolet. Die ontleding lei tot baie interessante dinge, waaronder voortbringende funksies, q-analise, asimptotiese tegnieke. Die taak is om die literatuur te verteer en dit op 'n samehangende manier aan te bied.

Project Supervisor: Prof. H. Prodinger.

5.12 Die Som-van-Syfers Funksie

As 'n mens 'n heelgetal n in die basis b voorstelling met syfers $0, 1, \ldots, b-1$ skryf, dan vorm 'n mens die som van sy syfers. Dit is gewild in basis 10, want dit lei tot sommige deelbaarheidstoetse. Die vraag is "wat is die gemiddelde van die som-van-syfers funksie wanneer 'n mens die eerste n nie-negatiewe heelgetalle beskou." DeLange het 'n baie eenvoudige en netjiese analise gegee. 'n Sterker en meer gesofistikeerde benadering is later ontwikkel: die Mellin-Perron formule. Die taak is om hierdie metodes te verstaan en op 'n aantreklike manier aan te bied. Die student moes 'n basiese kursus in komplekse analise gedoen het.

Projekleier: Prof. H. Prodinger.

5.13 Horton-Strahler Getalle

Horton-Strahler numbers measure the complexity of a river network. They were independently discovered in a totally different area, as the register function in computer science. The task is to read the relevant literature and present it in an attractive way.

Horton-Strahler meet die kompleksiteit van 'n riviernetwerk. Hulle is onafhanklik ontdek in 'n totaal ander omgewing, as die registerfunksie in rekenaarwetenskap. Die taak is om die relevante literatuur te lees en op 'n aantreklike manier aan te bied.

Projekleier: Prof. H. Prodinger.

5.14 Die Gelfandteorie vir kommutatiewe Banach algebras

As 'n Banach algebra A kommutatief is, dan bestaan daar baie multiplikatiewe lineêre funksionale op A. Hierdie funksionale speel 'n belangrike rol in die representasie van A, soos deur I. M. Gelfand teen ongeveer 1940 aangetoon is. Dit kan onder andere bewys word dat as $x \in A$, dan bestaan die spektrum van x uit alle komplekse getalle van die vorm $\chi(x)$, waar χ 'n multiplikatiewe lineêre funksionaal op A is. Hierdie feit, en die verwante teorie, het interessante toepassings rakende onderwerpe soos outomatiese kontinuïteit van homomorfismes, die bestaan en ekwivalensie van Banach algebra norme, en Fourierreekse. In hierdie projek sal ons hierdie teorie, sowel as sommige toepassings, ondersoek. Afgesien van funksionaalanalise, sal ons topologie, komplekse analise en 'n bietjie algebra in ons studie gebruik.

Om hierdie projek te kan baasraak, is dit noodsaaklik dat die student die volgende honneursmodules geneem het/gaan neem:

Funksionaalanalise en Maatteorie (eerste semester)
Reële en Komplekse Analise (eerste semester)
Versamelingsleer en Topologie (eerste semester)
Funksionaalanalise II (tweede semester)

Projekleier: Prof. S. Mouton.

5.15 Kategoriese Wiskunde

Afhangende van die belangstelling van die student sal die student in hierdie projek 'n onderwerp in klassieke wiskunde vanuit die perspektief van kategorieteorie bestudeer.

Aanbevole module: Kategorietorie.

Projekleier: Dr. J. Gray.