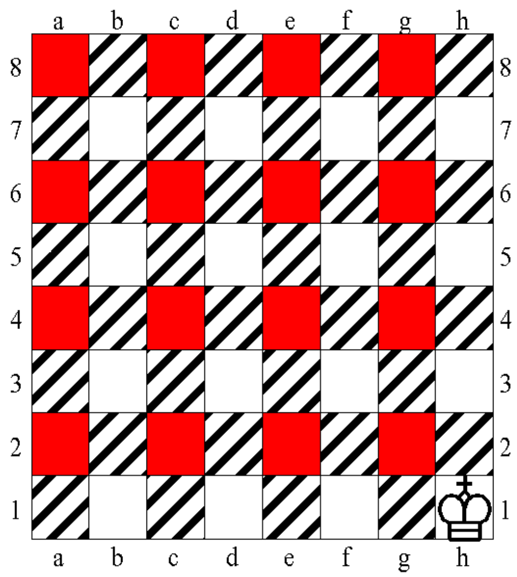
SPIELTHEORIE

Fachbereichsarbeit aus Mathematik

von Stephan Wagner
unter der Betreuung von Fr. Prof. Mag. Astrid Trathnigg

Schuljahr 1999/2000
8.a, BG/BRG Lichtenfels, Graz



Vorwort

Schon seit langem interessiere ich mich für Mathematik, seit der 4. Klasse AHS nehme ich an der Mathematik-Olympiade teil und seit der 5. Klasse besuche ich auch den entsprechenden Olympiadenkurs bei Hrn. Prof. Perz. Im Zuge dieser Olympiadentätigkeit - in den letzten drei Jahren gelang mir die Qualifikation zum Bundeswettbewerb - lernte ich einige Schüler kennen, die eine Fachbereichsarbeit verfasst hatten. Durch den so gewonnenen Eindruck und im Wissen, dass es sich um eine interessante Tätigkeit handeln würde, fasste ich den Entschluss, ebenfalls eine solche Arbeit zu schreiben. Da mich die Spieltheorie von allen Gebieten der Mathematik am meisten fasziniert, wählte ich dieses Thema auch für meine Fachbereichsarbeit aus. Darüber hinaus handelt es sich um ein Gebiet, bei dem hochmathematische Betrachtungen mit durchaus einfachen Mitteln vollzogen werden, die auch für einen AHS-Schüler sehr viel Betätigungsspielraum lassen. Obwohl noch sehr jung, hat die Spieltheorie eine Fülle von Anwendungen in allen Gebieten der Wissenschaft vorzuweisen.

Ich möchte an dieser Stelle allen Personen, die mir bei der Erstellung dieser Fachbereichsarbeit geholfen haben, insbesondere Fr. Prof. Trathnigg, herzlich danken.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung: Was haben Spiele mit Mathematik zu tun? 4

I Kombinatorische Spieltheorie 6

2 Definition von kombinatorischen Spielen 7

3 Prinzipielle Methoden zur Analyse kombinatorischer Spiele 11
3.1 Baumdiagramme 11
3.2 Wie viele Züge ist (m)eine Stellung wert? 16
3.3 Nim und Nim-Zahlen - das neutrale Spiel 28
3.4 Go-Moku und n-in-einer-Reihe - die Hales-Jewett-Paarung: . . 33

4 "Ad hoc"-Methoden zur Analyse kombinatorischer Spiele 38
4.1 Rückwärtsinduktion und die Suche nach Gewinnstellungen . . 38
4.2 Symmetrie im Spiel 41
4.3 Spiele, die keiner Strategie bedürfen 43

II Ökonomische Spieltheorie 45

5 Was ist nun ein ökonomisches Spiel? 46

6 Wie kann man strategisch wählen? 49

7 Lotterien und Nutzensfunktionen 51

8 Das Bimatrixspiel – dominante Strategien – das Nash-Gleichgewicht 58
8.1 Das Bimatrixspiel 58
8.2 Das Nash-Gleichgewicht und das Nash'sche Theorem 62

III Weitere (Bei-)Spiele 66

9 Angaben zu den Beispielen 67

10 Lösungen zu den Beispielen 71

A Einige bedeutende Spieltheoretiker 91

Literaturverzeichnis 93

Index 94

Schülerprotokoll 95

Erklärung des Schülers 96

Kapitel 1

Einleitung: Was haben Spiele mit Mathematik zu tun?

Wird man nach dem Thema seiner Fachbereichsarbeit gefragt, und man antwortet mit “Spieltheorie”, dann taucht unwillkürlich eine Frage auf:

> Was haben irgendwelche Spielereien mit der hohen Mathematik von heute zu tun?

Zu dieser Frage muss sofort gesagt werden: Diese Spielereien *sind* die hohe Mathematik von heute, die Spieltheorie ist eine der jüngsten und auch modernsten Sparten der Mathematik.

1944 veröffentlichten *J. Von Neumann* und *O. Morgenstern*, die Pioniere der Spieltheorie, ihr Buch “Theory of Games and Economic Behavior”, womit diese das Licht der Welt erblickte. Seitdem hat sie manche Bereiche etwa der Wirtschaftsmathematik revolutioniert, und nicht umsonst verlieh die Königlich Schwedische Akademie der Wissenschaften 1994 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften an die drei Spieltheoretiker *John Nash*, *John Harsanyi* und *Reinhard Selten* für ihre bahnbrechenden Arbeiten auf diesem Gebiet.

Bei Spielen denkt wohl jeder zuerst an Gesellschaftsspiele. Deren erste Funktion war es, Begebenheiten des Lebens, wie Krieg oder Jagd, abstrakt darzustellen und sich so ohne Blutvergießen mit einem Gegner messen zu können. Das sind Spiele für die Mathematik heute noch: abstrakte Darstellungen (die Mathematik selbst wird ja zumeist als furchtbar abstrakt bezeichnet) für das, was Menschen in Gesellschaft machen: sie agieren, sie handeln, sie bilden Formen des Zusammenlebens, können kooperativ oder nicht sein, im Endeffekt meist, um ihren eigenen Vorteil zu maximieren. Wann immer Menschen zusammentreffen, sie spielen ein komplexes Spiel, in dem sich Koalitionen bilden können, in dem Entscheidungen getroffen, Handlungen vollzogen werden, letztlich zum Erfolg oder Misserfolg des Einzelnen. Die formale Behandlung solcher Prozesse ist ein großes Anliegen der Mathematik, und dazu werden Spiele herangezogen, in dem zumeist zwei, aber auch mehrere, Spieler gegeneinander antreten und versuchen, ihren Gewinn zu optimieren. Hier versucht man zunächst, auf Strategien zu stoßen, die womöglich allgemeinen Charakter haben. Und auch wenn das Leben kein "Nullsummenspiel" oder Ähnliches ist, man stößt da und dort auf Äquivalente zum wirklichen Leben: auch hier kann man den "Zugzwang" oder "Pattstellungen" vorfinden und studieren.

Die erste Vermutung, die von vielen geäußert wird, ist, dass sich die Spieltheorie mit Wahrscheinlichkeiten - etwa bei Karten- oder Würfelspielen - befasst. Das muss ich leider strikt zurückweisen, denn genau darum geht es nicht. Auch wenn in der ökonomischen Spieltheorie mitunter Wahrscheinlichkeiten auftauchen - auch im Leben ist nicht alles 100%ig - so ist die Hauptaufgabe der Spieltheorie doch das Auffinden von Strategien, die unabhängig von Glück oder Pech arbeiten (wohl ein jeder Mensch vertraut lieber seinem eigenen Hirn als der blinden Fortuna) und ihrem Anwender Vorteile verschaffen. Ich möchte nun im Zuge dieser Fachbereichsarbeit zwei verschiedene Sparten der Spieltheorie beleuchten: Die kombinatorische Spieltheorie und die ökonomische Spieltheorie. Erstere hat den deutlich theoretischeren Charakter, aber vielleicht auch den unterhaltsameren. Nicht umsonst stürzt sich die Unterhaltungsmathematik auf sie, wobei etwa die Frage nach einer Gewinnstrategie für das beliebte "Memory"-Spiel beantwortet wird, sofern man über ein perfektes Gedächtnis verfügt (nachzulesen in "Das Versteck der Andromeda" von *I. Stewart*). Die ökonomische Spieltheorie dagegen sieht eher die praktischen Anwendungen, vor allem aus der Wirtschaft, aber auch aus Politik oder sogar Biologie, sie weist deutlich andere Formen und Hintergründe auf. Worum genau es sich bei den beiden handelt, soll nun geklärt werden, daher: in medias res!

Teil I

Kombinatorische Spieltheorie

Kapitel 2

Definition von kombinatorischen Spielen

Man fragt sich unwillkürlich, welche Kriterien denn mathematische Spiele überhaupt ausmachen. Nun, wie in allen anderen Teilbereichen auch neigen die Mathematiker dazu, Spiele zu abstrahieren und in eine bestimmte angenehme Form zu bringen. Viele der in diesem Teil untersuchten Spiele weisen eine ganz bestimmte Form auf, die ich als "normierte Form eines Spiels" bezeichnen möchte:

Definition eines normierten Spiels:

1. Es gibt genau zwei Spieler. Manche Spieltheoretiker nennen sie aus Gründen der Einfachheit stets Alice und Bob oder Links und Rechts. Auf diese Art der Benennung werde ich auch in den meisten Fällen zurückkommen.

2. Es gibt verschiedene, im günstigen Fall endlich viele, Positionen, darunter meist eine bestimmte Startposition.

3. Es gibt feste Spielregeln, die jedem Spieler aus einer bestimmten Position gewisse Züge gestatten, unter denen er frei wählen kann. Diese Spielregeln ändern sich während des gesamten Spieles unter keinen Umständen.

4. Die beiden Spieler ziehen abwechselnd.

5. Ein Spieler hat genau dann verloren, wenn er nicht mehr ziehen kann. Dies bezeichnet man als die übliche Konvention.

6. Das Spiel muss irgendwann mit einem Sieg enden, d.h. es kann keine ewige Wiederholung von Zügen geben.

7. Beide Spieler wissen alles über das laufende Spiel, es herrscht also vollständige Information.

8. Es gibt keine Zufallszüge (Würfeln, Ziehen einer Karte etc.).

Es wird im Folgenden zwar auch auf Spiele eingegangen werden, die nicht all diese Forderungen erfüllen (was bei praktischen Anwendungen meistens der Fall ist) und trotzdem angenehm zu analysieren sind, doch alle Spiele dieser Art haben eine gemeinsame Eigenschaft, die leicht zu beweisen ist:

Satz 1 *Weist ein Spiel normierte Form auf, so gibt es für Links oder für Rechts eine Gewinnstrategie, d.h. eine Methode, mit der der entsprechende Spieler unabhängig von den Zügen seines Gegners gewinnt. Dieser Satz behält auch noch Gültigkeit, wenn die übliche Konvention nicht gilt, also Kriterium 5 nicht erfüllt ist.*

Beweis: Aufgrund von Punkt 6 muss es stets einen Sieg geben, der entweder Links oder Rechts zufällt. Besitzt Links eine sichere Gewinnstrategie, so ist die Aussage bereis bewiesen, ansonsten hat Rechts eine Möglichkeit, Links stets am Gewinnen zu hindern, und damit eine Gewinnstrategie, da es nur die 2 möglichen Spielausgänge gibt.

□

Die meisten klassischen Spiele erfüllen nicht alle diese Bedingungen, etwa:

- Tic-Tac-Toe erfüllt Punkt 5 nicht, denn wenn ein Spieler nicht mehr ziehen kann, so kann er dabei sogar gewonnen haben, zudem ist ein unentschiedener Ausgang möglich.

- Schach erfüllt Punkt 5 genausowenig, außerdem besteht die Möglichkeit, dass ein Spiel ewig fortgesetzt wird, sofern nicht die üblichen Zusatzregeln gelten, die gegen diesen Fall erdacht worden sind. Somit ist Punkt 6 auch nicht erfüllt.

- Backgammon, Mensch-ärgere-dich-nicht, etc. enthalten Zufallszüge, denn sie arbeiten mit Würfeln.

- Schiffeversenken entbehrt der vollständigen Information, verstößt somit gegen Punkt 7!

- Alle Kartenspiele enthalten unvollständige Information und Zufallszüge. Bridge etwa besteht im Grunde aus zwei Spielern zu je zwei Personen, die zum Teil nicht einmal die eigenen Karten kennen!

- Tennis oder Fußball sind so gesehen auch Zweipersonenspiele, aber weder Züge noch Positionen sind wirklich klar definiert.

- Teilweise kann man diese Punkte so umformulieren, dass sie zutreffen. Etwa kann man für Punkt 5 die Gewinnbedingung so modifizieren, dass Erreichen der Gewinnbedingung als Hindernis für einen weiteren Zug gilt. Das ist jedoch eher Definitionssache.

Oft ist es schon eine mathematische Aufgabe für sich, die Gültigkeit gewisser Kriterien zu beweisen:

Links und Rechts spielen folgendes Spiel: Abwechselnd färben sie je ein Feld eines 3×7-Feldes blau bzw. rot. Links gewinnt, wenn es ihm gelingt, dass 4 blaue Felder ein Rechteck bilden, Rechts, wenn ihm dies mit den roten Feldern gelingt. Kann es hier ein Unentschieden geben?

Die Antwort ist nein, und der Beweis ist sehr hübsch:

Man betrachte die 7 Spalten des Feldes, die aus je 3 Feldern bestehen. Für sie gibt es $2^3 = 8$ Möglichkeiten, wie sie gefärbt sein können. Weisen 2 Spalten die gleiche Färbung auf, so gibt es in diesen beiden sicher ein einfärbiges Rechteck. Wir führen den Beweis indirekt. Nehmen wir an, es gibt eine vollständige Färbung ohne einheitlich gefärbtes Rechteck. Nun unterscheiden wir 2 Fälle:

1. Es gibt eine Spalte, in der alle 3 Felder gleiche Farbe haben.

   Nun darf es keine weitere Spalte geben, in der diese Farbe zweimal oder dreimal vorkommt, sonst gibt es ein solches Rechteck. Also bleiben für die übrigen 6 Spalten nur noch 4 Färbungsmöglichkeiten, weshalb es unter diesen nach dem Schubfachschlussprinzip[1] 2 gleiche geben muss, also auch ein einheitlich gefärbtes Rechteck. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Annahme.

[1]Ein klassisches mathematisches Verfahren. Das Grundprinzip besteht darin, dass bei willkürlicher Verteilung von $n + 1$ Gegenständen auf n Schubfächer mindestens 2 Gegenstände im gleichen Fach zu liegen kommen müssen. Allgemeiner müssen bei der Verteilung von $kn+a$ ($a > 0$) "Gegenständen" (in diesem Fall Spalten) auf n "Schubfächer" (hier Färbungsmöglichkeiten) mindestens $k + 1$ Gegenstände im gleichen Schubfach landen.

2. Es gibt keine solche Spalte.

   Damit bleiben für die 7 Spalten nur noch 6 mögliche Färbungen übrig, also muss es nach dem Schubfachschlussprinzip 2 gleiche geben, und damit auch ein solches Rechteck, womit wieder ein Widerspruch erreicht ist.

Also kann es kein Unentschieden geben, einer der beiden Spieler muss also eine Gewinnstrategie haben (Satz 1.1.). Wir können sogar sagen, dass es Links, der beginnende Spieler, sein muss, denn:

Angenommen, Rechts hätte eine sichere Gewinnstrategie. Dann könnte Links mit einem beliebigen Zug beginnen (schaden kann dieser sicher nicht), und danach die Strategie für den Spieler Rechts verfolgen. Sollte ein dafür notwendiger Zug bereits zu Beginn gemacht worden sein, dann ist es umso besser, und man kann wiederum einen beliebigen Zug machen. Da die Strategie für Rechts funktioniert, muss sie dies auch für Links tun, also hat damit Links auch eine Gewinnstrategie, womit ein Widerspruch erreicht ist. Man beachte, dass dieser Beweis nur deshalb funktioniert, weil der "Abwartezug" von Links für diesen keinen Schaden bringen kann. Allgemein gilt:

Satz 2 *Bei einem Spiel ohne Unentschieden, bei dem es für einen Spieler in jeder Situation sicher besser oder zumindest gleich gut ist, einen beliebigen Zug zu machen als zu "passen", d.h. keinen Zug zu machen, hat stets der beginnende Spieler eine Gewinnstrategie. Gibt es auch ein Unentschieden, so kann der nachziehende Spieler zumindest keinen Sieg forcieren.*

Etwa beim Schach gilt dieses Argument (Man spricht hierbei von "Strategiediebstahl") freilich nicht, denn wie der leidgeprüfte Schachspieler weiß, kann es dabei hin und wieder durchaus besser sein, zu passen als einen Fehler zu machen. Somit darf beim Schach selbst die Möglichkeit eines forcierten Sieges für Schwarz nicht ausgeschlossen werden.

Im nächsten Kapitel soll nun darauf eingegangen werden, wie man normierte Spiele behandeln kann.

Kapitel 3

Prinzipielle Methoden zur Analyse kombinatorischer Spiele

3.1 Baumdiagramme

Baumdiagramme sind aus der Graphentheorie oder aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung wohl mehr als genug bekannt. Auch zur Analyse von Spielen - besonders von einfachen Spielen - eignen sie sich mitunter sehr gut.

Das einfache Prinzip ist schnell erklärt: Jeder Position des Spiels wird ein Knoten des Baumes zugeordnet, jedem Zug eine Kante, und zwar eine gerichtete, d.h. eine solche, bei der die Richtung, in der sie durchlaufen werden darf, festgelegt ist. Wichtig ist dabei auch, dass gleich aussehende Stellungen nicht gleich sein müssen, da das Zugrecht zu berücksichtigen ist. Man beachte, dass wegen Punkt 6 der Definition keine Zyklen in diesem Graph auftauchen können, weshalb er auch "Baum" genannt werden darf. An die Enden des Baumes werden die jeweiligen Resultate geschrieben, also Sieg für Links oder Rechts. Nun werden von den Enden zur Wurzel hin alle Knoten untersucht. In jedem Knoten ist entweder Links oder Rechts am Zug. Jeder der Züge führt zu einem bestimmten Ergebnis. Ist in diesem Knoten Links am Zug, so wird unter diesen Ergebnissen das beste für Links bestimmt, sonst umgekehrt. Alle Kanten, die vom betrachteten Knoten ausgehen, werden nun gelöscht und der Knoten selbst durch dieses optimale Ergebnis ersetzt. Die Begründung für diese Vorgehensweise ist verhältnismäßig einfach: Der am Zug befindliche Spieler wird selbstverständlich unter seinen Möglichkeiten diejenige wählen, die am besten für ihn ist. Deshalb kann beim Erreichen dieses Knotens davon ausgegangen werden, dass das Spiel daraufhin auch mit diesem Ergebnis enden wird. Somit kann der Knoten mit dem jeweiligen Ergebnis gleichgesetzt werden.

Auf diese Art und Weise verfährt man nun mit allen Knoten bis hin zur Wurzel, wo man dann das endgültige zu erwartende Ergebnis erhält, sofern beide Spieler optimal spielen[1], sowie die Strategie, die dorthin führt.

Am besten lässt sich das Ganze an einem Beispiel studieren, weshalb ich hier gleich einen Klassiker der kombinatorischen Spieltheorie vorstellen möchte: Hackenbush.

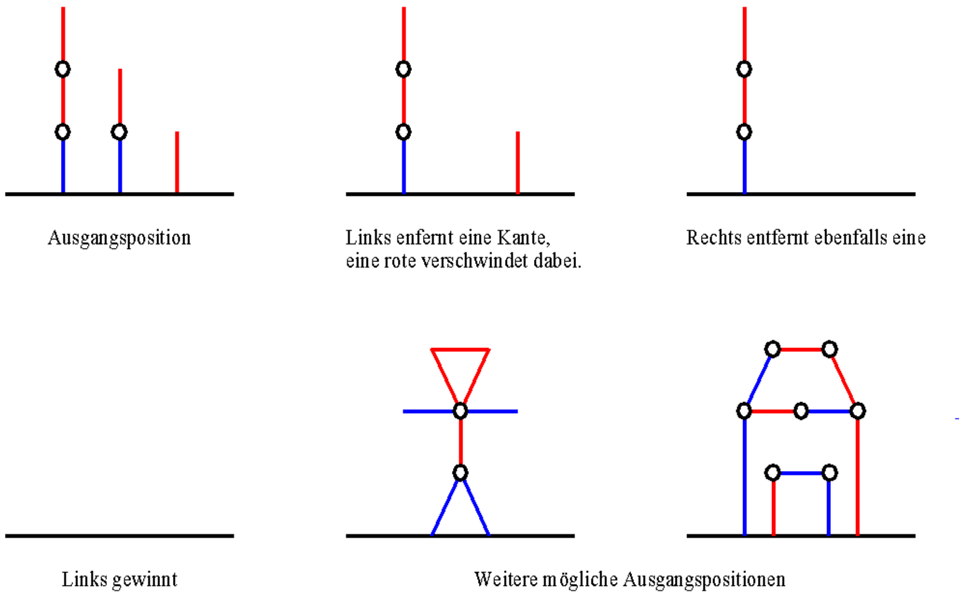


Abbildung 3.1: Ein Beispiel für Hackenbush

Die Regeln dieses Spiels sind höchst simpel: die Grundstellung besteht aus einer bestimmten Anordnung von blauen und roten Kanten (beiderlei Anzahl kann beliebig gewählt werden, auch z.B. 1000 rote und 1 blaue Kante

[1]Dies ist eine Prämisse, die in der Spieltheorie stets gemacht wird: die vollkommene Rationalität des Menschen. Die tatsächliche Umsetzung sei den Gentechnikern überlassen.

sind erlaubt), die in irgendeiner Form “mit der Erde verbunden” sind (direkt oder über andere Kanten). Die Spieler Links und Rechts nehmen abwechselnd Kanten davon weg, wobei Links nur blaue und Rechts nur rote nimmt. Alle Kanten, die danach “in der Luft hängen”, also nicht mehr mit der Erde verbunden sind, auch nicht über andere Kanten, fallen mit weg. Sieger ist - da es sich um ein normiertes Spiel handelt - derjenige, dessen Gegner nicht mehr ziehen kann, da diesem keine Kanten mehr zur Verfügung stehen. Abbildung 3.1 gibt Beispiele für Aufstellung und für Züge. Der Spielverlauf darf freilich nicht als optimal bezeichnet werden. Weiters wird gezeigt, dass bei der Auswahl der Startposition der Phantasie freier Lauf gelassen werden darf.

Wir fragen uns nun, ob Rechts seinem Schicksal hätte ausweichen können. Dazu zeichnen wir den Spielbaum auf, wobei wir zunächst eine Notation einführen, die uns dies erleichtern soll:

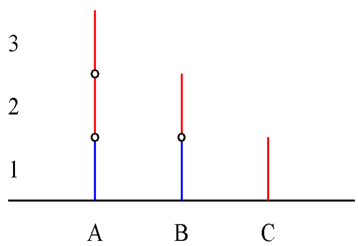


Abbildung 3.2: Hackenbush-Notation

Ein Zug wird hier einfach bezeichnet, indem die Koordinaten der weggenommenen Kante notiert werden. Der vollständige Spielgraph sieht nun so aus, wie in Abbildung 3.3 dargestellt.

Geht man nun nach dem oben genannten Schema vor, so ergeben sich die Schritte, wie sie in Abbildung 3.4 gezeigt sind.
Die Analyse ergibt also, dass Rechts keineswegs hätte verlieren müssen, ja bei genauem Spiel gewinnen hätte sollen. Sie zeigt auch, dass der Fehler von Rechts - nämlich C1 - durch A2 oder A3 hätte ersetzt werden sollen.

Im Prinzip lässt sich eine solche Vorgehensweise auch auf nahezu alle anderen Spiele verallgemeinern, auch wenn etwa mehrere Spieler beteiligt sind oder

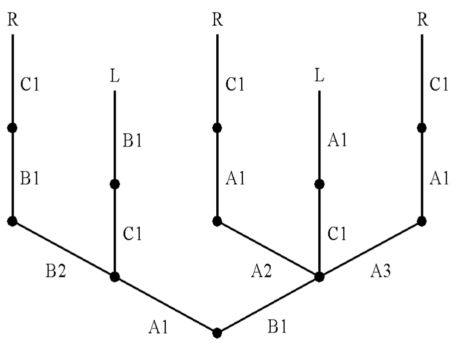


Abbildung 3.3: Spielbaum für Hackenbush. R bezeichnet hierbei Sieg für Rechts, L Sieg für Links

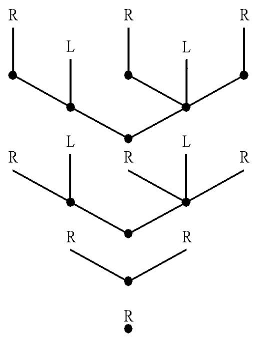


Abbildung 3.4: Schritte zum Fällen des Spielbaums

mehr als 2 verschiedene Ergebnisse möglich sind, im Folgenden wird auch hierzu ein Beispiel gegeben werden. Jedoch wird der Aufwand, der im Zuge dieses Systems betrieben werden muss, exorbitant hoch, wenn die Spiele einigermaßen komplex werden. So ist etwa der Spielbaum für das bekannte Tic-Tac-Toe bereits derart umfangreich und verzweigt, dass man schon sehr lange brauchen würde, um zum richtigen Ergebnis zu kommen. Und sollte schließlich irgendjemand das Kunststück vollbringen, den Spielbaum für Schach aufzuzeichnen, so gebührt ihm unser aller Hochachtung, denn dafür würde alles Papier der Welt nicht ausreichen. Somit werden wir uns wohl mit einer vollständigen Analyse für das Schachspiel noch ein wenig gedulden müssen. Allerdings wird die eben genannte Methode tatsächlich - wenn auch in verfeinerter Form - von spielenden Computern angewandt[2], etwa von Schachprogrammen: Vereinfacht gesagt, verfolgen diese den Spielgraph für einige Züge und bewerten die entstandene Stellung. Nun wenden sie das eben erklärte Schema an und ermitteln so den ihrer Ansicht nach stärksten Zug.

Es folgt nun ein Beispiel für Spiele, bei denen mehrere Ergebnisse möglich sind, in diesem Fall ist auch das Unentschieden U möglich. Dies sei der Spielgraph eines fiktiven Spiels (Links beginnt - wie in allen weiteren Spielen, bei denen nicht beide Fälle betrachtet werden):

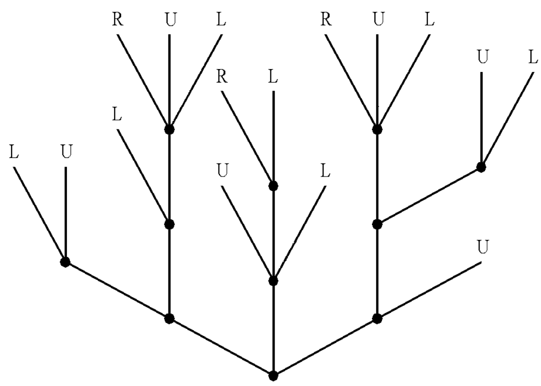


Abbildung 3.5: Spielbaum mit Unentschieden

[2]Mit Erfolg, wie man sieht, denn der Schachweltmeister wurde bereits von einem Computer besiegt. In anderen Spielen, wie Othello (auch als Reversi bekannt), haben Computer längst die Herrschaft über die Menschen übernommen. Einzig im sehr komplexen japanischen Go-Spiel hinken sie noch stark nach.

Dieses Spiel ist schon ein wenig komplizierter, doch konsequente Anwendung des Schemas führt zum Erfolg, und man erkennt schnell, dass Links gewinnen sollte (Abbildung 3.6).

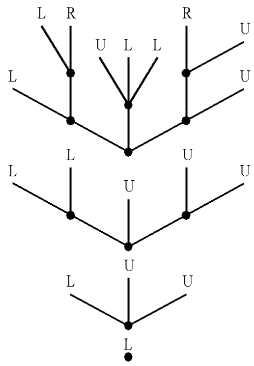


Abbildung 3.6: Auflösen des obigen Spiels

Nun ist das Problem an diesem Verfahren, wie bereits gesagt, die Durchführbarkeit. Zwar ist das Auflösen mit einem einfachen Algorithmus zu schaffen, wobei die Anzahl der Schritte gleich der "Höhe" des Baumes ist (d.h. die Anzahl der Kanten zwischen der Wurzel und dem entferntesten Endpunkt), doch die Graphen werden mit steigender Komplexität viel zu groß, als dass man sie noch vernünftig fassen könnte. Deshalb greift man zumeist auf andere Methoden zurück, wie sie in den nächsten Kapiteln besprochen werden sollen.

3.2 Wie viele Züge ist (m)eine Stellung wert?

Kehren wir wieder zurück zu unserem Hackenbush-Spiel. Aufstellungen, wie sie im vorangegangenen Kapitel gezeigt wurden, sind zwar einfach zu analysieren, da man mit einem Spielbaum durchkommt, aber auch wenig spektakulär. Wohl ein jeder Mathematiker wünscht sich, auch jede Verallgemeinerung lösen zu können, also in jeder beliebigen Stellung sagen zu können, wer gewinnen sollte. Dazu betrachten wir zunächst Stellungen, bei denen rote und blaue Kanten getrennt sind (Abbildung 3.7).

Bei diesem Spiel können die Kontrahenten einander nicht in die Quere kommen, und weil sie ja optimal spielen, bemühen sie sich, sich nicht selbst Kanten wegzunehmen. Dies gelingt ihnen einfach, indem sie ihre Figuren schön von oben nach unten abtragen. Wer ist nun im Vorteil?

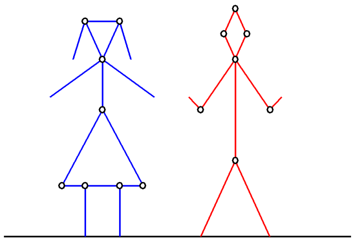


Abbildung 3.7: Hackenbush - Mädchen und Junge

Bloßes Abzählen zeigt uns, dass Links 15 Kanten zur Verfügung hat, Rechts nur 11. Das heißt, dass Links 4 Züge mehr machen kann als Rechts und somit, dass Rechts als erstem die Züge ausgehen. In dieser Position hat Links 4 Züge Vorsprung, die Position hat damit den Wert 4. Er sei definiert als der Vorsprung, den Links gegenüber Rechts hat. Ist er negativ, hat Rechts den Vorteil.

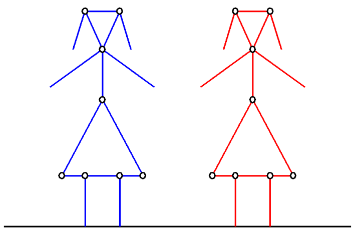


Abbildung 3.8: Zwei Mädchen - wer ist im Vorteil?

Nun schauen wir uns einmal Abbildung 3.8 an. Hier haben beide Spieler die gleichen Voraussetzungen. Wer gewinnt also? Nehmen wir einmal an, dass Links beginnt. Nun macht Rechts einfach jeden Zug von Links auf seiner Seite nach. Egal, was Links macht, Rechts hat sicher noch einen Zug übrig. Analog kann allerdings Links gewinnen, wenn Rechts am Zug ist. Eine solche Stellung, bei der derjenige verliert, der am Zuge befindlich ist, nennen wir Nullposition oder Nullspiel. Sie hat den Wert 0.

Und was ist bitte ein halber Zug?

So paradox es klingen mag, es kann durchaus Positionen geben, die einen halben Zug oder einen anderen Bruchteil eines Zuges wert sind. Sehen wir uns einmal die einfache Figur von Abbildung 3.9a an:

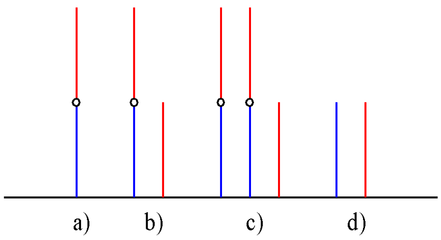


Abbildung 3.9: Erklärung für halbe Züge

Wenn in dieser Position Links beginnt, nimmt er die blaue Kante weg, die rote fällt weg - Links gewinnt. Beginnt dagegen Rechts, nimmt er seine Kante, Links nimmt ebenfalls seine Kante und gewinnt wieder. Man kann also wohl guten Gewissens von einem Vorteil für Links sprechen. Aber wie groß ist er? Versuchen wir, ihn zu kompensieren, indem wir Rechts einen Zug dazugeben (Abb. 3.9b). Wenn jetzt Links beginnt, nimmt er seine Kante weg, Rechts nimmt die, die ihm noch übrigbleibt, und gewinnt. Rechts hingegen würde beginnen, seine gefährdete obere Kante zu nehmen, woraufhin beide noch genau einen Zug machen können. Wieder gewinnt Rechts. Der Vorteil aus Figur 3.9a scheint also überkompensiert worden zu sein. Er muss also einen Wert zwischen 0 und 1 haben, wir vermuten $\frac{1}{2}$. Diese Vermutung können wir bestätigen, indem wir Stellung 3.9a zweimal nehmen, was einen Vorteil von $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ ergeben sollte, und zum Ausgleich Rechts einen Zug dazugeben. Wir erhalten Stellung 3.9c. Beginnt in dieser Links, so muss er eine seiner beiden Kanten wegnehmen und hinterlässt Stellung 3.9b, die ja für Rechts gewonnen ist. Beginnt aber Rechts, so kann er entweder eine der oberen oder die untere Kante nehmen. Im ersten Fall nimmt Links darauf die jeweils andere Kante weg, also die, mit der noch eine Kante von Rechts wegfällt. Dann haben beide noch einen Zug, also gewinnt Links. Im anderen Fall nimmt Links eine seiner Kanten weg, womit Stellung 3.9a entstanden ist, die ja Links gewinnt.

Aus diesen Überlegungen sieht man, dass Links gewinnt, wenn Rechts am Zug ist und umgekehrt. Wir haben es folglich mit einer Nullposition zu tun, womit unsere Vermutung bestätigt wäre.

Das Interessante daran ist vor allem, dass es nicht allein auf die Anzahl der Kanten ankommt, sondern auch auf die Positionierung. So ist 3.9a für Links vorteilhafter als 3.9d, denn erstere hat den Wert $\frac{1}{2}$, die andere den Wert 0.

Versuchen wir als nächstes, komplexeren Positionen Werte zuzuordnen.

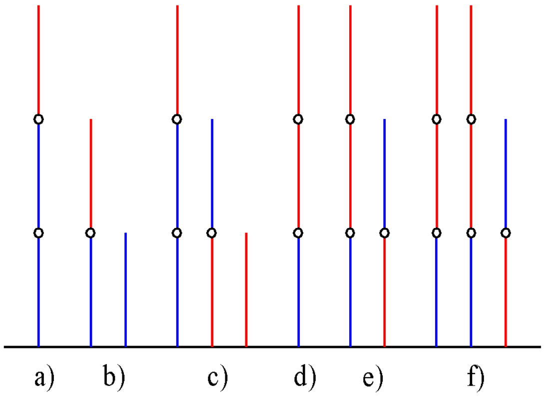


Abbildung 3.10: Komplexere Hackenbush-Positionen

Die erste Frage, die wir uns stellen wollen: hat Position 3.10a oder 3.10b den größeren Wert? Für Position 3.10b ist die Frage nach dem Wert leicht beantwortet, denn sie setzt sich aus 2 bekannten Positionen zusammen, deren Gesamtwert ist $1\frac{1}{2}$. Für Position 3.10a ist die Lösung etwas schwieriger zu finden. Wie man solche Werte mit einer Regel bestimmen kann, sei später erklärt. Hier beweisen wir die Vermutung, dass diese Position den Wert $1\frac{1}{2}$ hat, indem wir als Kompensation Rechts $1\frac{1}{2}$ Züge dazugeben (Abb. 3.10c) und beweisen, dass es sich dann um ein Nullspiel handelt. Jeder der beiden Spieler hat eine bedrohte Kante. Der am Zug befindliche kann nun entweder die bedrohte Kante des Gegners wegnehmen oder seine eigene bedrohte Kante in Sicherheit bringen (Rechts hat noch eine Alternative, nämlich, seine einzelne Kante zu nehmen, dies ist jedoch klarerweise nicht günstig). In jedem Fall reagiert der Gegner genauso und hinterlässt damit eine Situation, in der beide noch je eine oder 2 Kanten haben. Diese Situation gewinnt dann freilich der, der nicht ziehen muss. Somit verliert auch in der ursprünglichen Situation der am Zug befindliche Spieler, und damit handelt es sich um ein Nullspiel.

Ähnlich verfahren wir auch mit Position 3.10d. Sobald hier Links zum Zug kommt, gewinnt er, denn er eliminiert alle Kanten. Somit muss diese Position vorteilhaft für Links sein, also einen positiven Wert haben. Versuchen wir wieder, diesen Vorteil auszugleichen, und geben Rechts $\frac{1}{2}$ Zug dazu (Abb. 3.10e). Links am Zug muss entweder die linke Kante nehmen und eine Situation vom Wert $-\frac{1}{2}$ zurücklassen (dieser Wert ist ja schon bekannt) oder die rechte Kante nehmen, worauf Rechts die oberste Kante nimmt und eine Situation vom Wert $\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ zurücklässt, in beiden Fällen mit Sieg für Rechts. Rechts am Zug dagegen nimmt die oberste Kante und hinterlässt eine Nullposition, die Links am Zug verliert. Daraus schließen wir wieder, dass der Vorteil überkompensiert worden ist, und vermuten für Position 3.10d den Wert $\frac{1}{4}$, was sich mit Hilfe der Figur 3.10f auch zeigen lässt, denn bei ihr handelt es sich um eine Nullposition.

Auf ähnliche Weise lassen sich auch Werte anderer einfacher Positionen bestimmen, etwa:

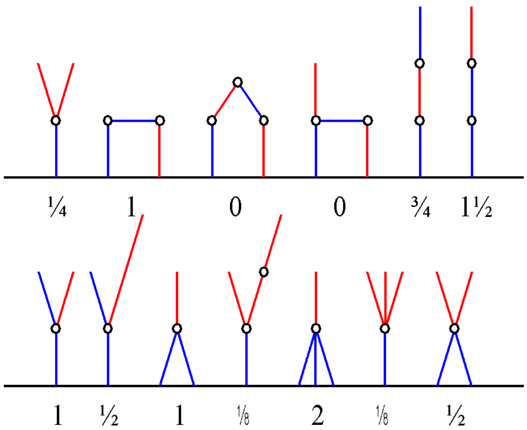


Abbildung 3.11: Werte verschiedener Hackenbush-Positionen

So einfach wie möglich - die Einfachheitsregel:

Welche Werte tauchen eigentlich bei Hackenbush-Positionen überhaupt auf? Unsere bisher gefundenen Werte legen nahe, dass als Werte alle Brüche der Form $\frac{a}{2^k}$ möglich sind, wobei a, k ganze Zahlen sind und $k \geq 0$ ist. Das sind auch tatsächlich alle möglichen Werte für endliche Hackenbush-Positionen. Für unendliche Positionen können sich auch andere Werte ergeben, wie man später sehen wird. Wie man nun den Wert einer beliebigen Position aus den

Werten für einfachere Positionen explizit herleiten kann, soll hier gezeigt werden: betrachten wir einmal folgende einfache Position (Abbildung 3.12).

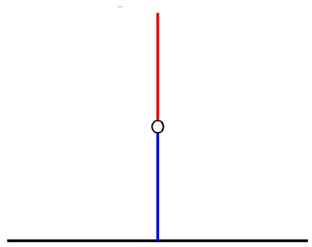


Abbildung 3.12: Die Position $\{0 \mid 1\}$

Sie hat, wie wir bereits festgestellt haben, den Wert $\frac{1}{2}$, doch das tut im Moment nichts zur Sache. Die beste - weil einzige - Option, die Links in dieser Situation hat, ist, die eine Kante zu entfernen, womit eine Stellung vom Wert 0 entsteht. Das Beste, was Rechts tun kann, ist, eine Stellung vom Wert 1 zurückzulassen. Wir schreiben nun für diese Position $\{0 \mid 1\}$, ebenso verfahren wir für alle anderen Positionen, indem wir in die geschwungene Klammer die besten Optionen für Links bzw. Rechts schreiben.

Außerdem schreiben wir nun $\{0 \mid 1\} = \frac{1}{2}$, denn die Position hat den Wert $\frac{1}{2}$. Unsere erste Vermutung mag nun sein, dass der Wert immer gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Optionen ist. Dies ist jedoch leider falsch. Statt dessen gibt es die sogenannte Einfachheitsregel, die es ermöglicht, den Wert einer Position aus den besten Optionen für Links und Rechts zu bestimmen:

Satz 3 *Der Wert einer Position liegt immer strikt zwischen den beiden Optionen für Links und Rechts. Der Wert ist - wenn er überhaupt als Zahl definiert ist (auch davon sind manchmal Ausnahmen möglich) - stets der einfachste in diesem Intervall, d.h. jener, bei dem im Nenner der Bruchdarstellung (gekürzter Bruch!) die niedrigste Zweierpotenz auftritt. Bei mehreren natürlichen Zahlen im Intervall ist die betragskleinste zu wählen.*

Beispiele hierfür sind etwa:

$$\begin{array}{lll} \{\frac{1}{2} \mid 2\} = 1 & \{\frac{3}{8} \mid 1\} = \frac{1}{2} & \{-\frac{1}{2} \mid 1\} = 0 \\ \{\frac{1}{4} \mid \frac{1}{2}\} = \frac{3}{8} & \{0 \mid \frac{1}{2}\} = \frac{1}{4} & \{0 \mid 3\} = 1 \end{array}$$

Es gibt nur einen Fall, dass es zwei Werte im gleichen Intervall gibt, die gleich einfach sind: nämlich mehrere ganzzahlige Werte. Der Beweis hierfür ist einfach, denn von 2 aufeinanderfolgenden Brüchen mit gleichem Nenner (Zweierpotenz) muss es einen geben, dessen Zähler durch 2 teilbar ist. Dieser lässt sich dann aber kürzen.

Man bemerkt unter anderem: haben die beiden Optionen verschiedene Vorzeichen, so ist der Wert stets Null.

Jeder gekürzte Bruch, der eine Zweierpotenz im Nenner stehen hat, besitzt eine sogenannte einfachste Darstellung in Form von 2 Optionen, und zwar wie es hier gezeigt ist (ein leeres Feld bedeutet, dass der betreffende Spieler am Zug gar keine Zugmöglichkeit mehr hat):

$$0 = \{\,|\,\} \quad n+1 = \{n\,|\,\} \quad -n-1 = \{\,|\,n\} \quad \tfrac{2p+1}{2^{q+1}} = \{\tfrac{p}{2^q}\,|\,\tfrac{p+1}{2^q}\}$$

Man fragt sich nun unwillkürlich, ob es nicht auch irgendwelche Positionen geben kann, die Werte wie z.B. $\frac{2}{3}$ haben. Antwort: es gibt sie, aber sie sind nicht endlich! Um diese Idee zu illustrieren, sehen wir uns einmal die folgende Folge von Positionen an:

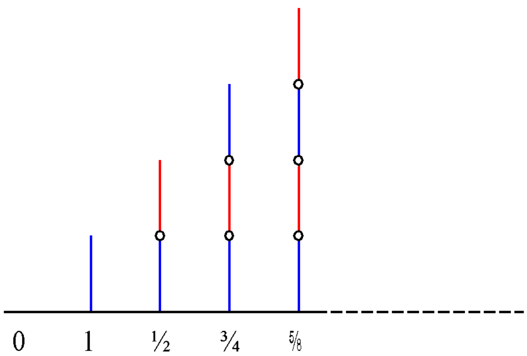


Abbildung 3.13: Eine Folge von Hackenbush-Positionen, die gegen $\frac{2}{3}$ konvergiert

Ihre Werte sind durch folgende Formel bestimmt:

$$a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3 \cdot 2^{n-1}} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Der rechte Teil dieses Ausdrucks strebt wegen $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$ gegen 0, also strebt der gesamte Ausdruck gegen $\frac{2}{3}$. Somit hat die unendliche, blau-rot-alternierende Hackenbush-Kette paradoxerweise genau den Wert $\frac{2}{3}$![3] Ganz ähnlich lässt sich auch eine Hackenbush-Kette mit dem Wert $\frac{1}{3}$ finden (Abb. 3.14).

Allgemein kann man sogar Ketten für beliebige reelle Werte finden, die genau

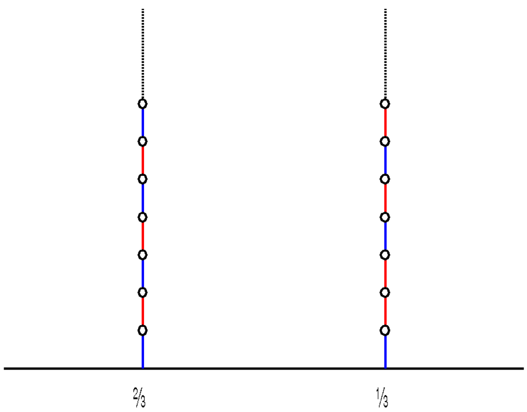


Abbildung 3.14: Hackenbush-Ketten der Werte $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{3}$

dann endlich sind, wenn der Wert rational mit einer Zweierpotenz im Nenner ist und genau dann periodisch, wenn sie rational mit einem anderen Nenner sind. Um eine solche Kette zu finden, verwendet man die sogenannte Berlekamp'sche Regel (nach *E. Berlekamp*, einem überaus bedeutenden Vertreter der kombinatorischen Spieltheorie):

Man schreibe den gebrochenen Anteil der Zahl in binärer Darstellung, etwa:

$$\begin{aligned}\frac{1}{8} &= 0.001\\ 1\frac{3}{4} &= 1.11\\ 3\frac{5}{8} &= 3.101\\ \frac{2}{3} &= 0.1010101\ldots\end{aligned}$$

[3]Die Spieldauer ist übrigens dennoch endlich, denn wird eine beliebige Kante genommen, dann bleiben nur noch endlich viele Kanten übrig.

$$
\begin{aligned}
1\frac{4}{7} &= 1.100100100\ldots \\
2\frac{3}{5} &= 2.100110011001\ldots
\end{aligned}
$$

Nun ersetze man den ganzzahligen Anteil durch ebensoviele blaue Kanten, das Komma durch eine blaue und eine rote Kante und jede weitere Eins durch eine blaue Kante bzw. jede weitere Null durch eine rote Kante. Im Falle einer endlichen Binärdarstellung muss die letzte Eins jedoch weggelassen werden (bei einer unendlichen Darstellung gibt es eine solche ja gar nicht).

Das funktioniert theoretisch auch bei transzendenten Zahlen. So hat etwa π die folgende Darstellung:

$$\pi = 3.0010010000111111011010101000100010000101101000 1\ldots$$

Deshalb hat folgende Hackenbush-Kette den Wert π:

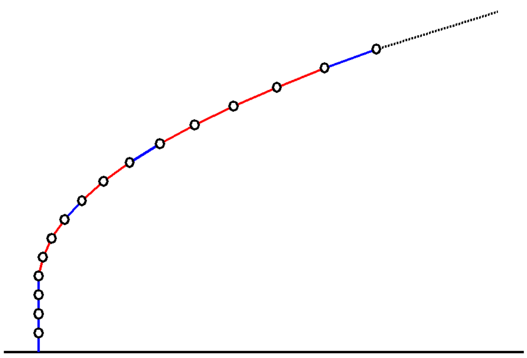


Abbildung 3.15: Auch π ist als Wert einer Hackenbush-Position möglich!

Negative Zahlen bilden inverse Ketten, die dann mit einer roten Kante beginnen. Das ganze Muster lässt sich auch umgekehrt anwenden, d.h. es lässt sich zu jeder Hackenbush-Kette sofort explizit ihr Wert angeben.

Hackenbush gut und schön - aber was gibt's noch?

Die soeben vorgestellte Methode mit der Bestimmung des Wertes von Positionen (in der Einheit Züge) lässt sich für eine ganze Reihe weiterer kombinatorischer Spiele anwenden, von denen ich nur exemplarisch 2 herausgreifen möchte:

Kuchenschneiden:

Die Mutter von Alice und Bob hat einen rechteckigen Gitterkuchen gebacken, den die beiden nun teilen sollen: Alice bekommt ein Messer und teilt in waagrechter Richtung, Bob in senkrechter, abwechselnd teilen sie je ein Rechteck in 2 kleinere. Es verliert wie immer, wer nicht mehr teilen kann. Wir wollen nun - abhängig von Länge und Breite des Kuchens - bestimmen, wer im Vorteil ist. Ein einzelnes Einheitsquadrat erlaubt keinem einen Zug, also ist es eine Nullposition. Das 1×2-Rechteck bietet demjenigen Vorteil, der es zerschneiden darf (abhängig von der Ausrichtung), und zwar einen Zug, das 1×3-Rechteck bietet 2 Züge, das 1×4-Rechteck 3, etc. Das 2×2-Quadrat ist äquivalent zu $\{-2|\,2\}$, also ist es eine Nullposition. Das 2×3-Rechteck ist schon etwas schwieriger. Nehmen wir an, es habe 2 horizontale und 3 vertikale Linien, der umgekehrte Fall verläuft klarerweise analog. Da die vertikalen Linien in der Überzahl sind, möchte man meinen, dass Bob gewinnt, denn er hat eine Zugmöglichkeit mehr. Dies ist jedoch nicht richtig, denn er muss nach seinem Zug ein 2×1- und ein 2×2-Rechteck hinterlassen, was Alice $1 + 0 = 1$ Zug Vorteil gibt. Umgekehrt kann aber auch Alice am Zug nicht gewinnen, denn ihre einzige Eröffnung gibt Bob 4 Zugmöglichkeiten. Also ist 2×3 auch eine Nullposition.

Nun wollen wir eine Tabelle anlegen. Hier tragen wir zunächst die eben herausgefundenen Werte ein. Dann gehen wir für eine weitere Position folgendermaßen vor: Wir bestimmen zu jeder Schnittmöglichkeit, die Alice bzw. Bob am Zug hat, den resultierenden Wert. Das ist immer möglich, denn beim Schnitt entstehen stets 2 kleinere, also bereits untersuchte Stücke, deren Werte wir nur zu addieren brauchen. Unter allen Werten suchen wir den jeweils besten und bestimmen daraus den Wert der Ursprungsposition nach der Einfachheitsregel. Die Tabelle, die sich daraus ergibt, weist eine bemerkenswerte Form auf:
Es bildet sich ein Muster aus Gruppen von Feldern mit gleichem Wert, die jeweils zusammen ein Quadrat bilden. Diese Quadrate wiederum haben nach innen hin eine Seitenlänge von $1, 2, 4, \ldots$, wobei sich auch hier der bemerkenswerte Zusammenhang mit Zweierpotenzen zeigt.

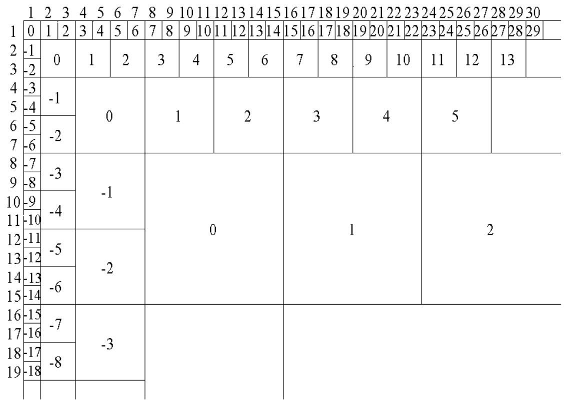


Abbildung 3.16: Tabelle fürs Kuchenschneiden

Aus dieser Tabelle kann man nun unmittelbar beliebige Werte ablesen, z.B.:

5×8-Rechteck - Wert -1	11×9-Rechteck - Wert 0
4×6-Rechteck - Wert 0	18×6-Rechteck - Wert 3

Kröten-und-Frösche:

Dieses Spiel wird auf einem rechteckigen Feld gespielt, auf dem in jeder Reihe eine Kröte und ein Frosch stehen. Links zieht die Kröten, und zwar stets nach rechts. Ebenso zieht Rechts die Frösche, und zwar stets nach links. Die Tiere dürfen in jedem Zug entweder ein Feld weiter, oder, wenn das gegnerische Tier direkt davor steht, über dieses hinwegspringen und auf dem dahinterliegenden Feld stehenbleiben. Sieger ist derjenige, dessen Gegner mit all seinen Tieren am Rand angelangt ist und somit zugunfähig ist. Abbildung 3.17 zeigt eine mögliche Position, bei der blaue Kreise Kröten und rote Kreise Frösche symbolisieren.

Wer gewinnt nun dieses Spiel und mit wieviel Vorsprung? Zur Beantwortung dieser Frage müssen wir nur die Werte der Positionen in den einzelnen Reihen bestimmen und sie addieren.

Um die einzelnen Werte zu bestimmen, machen wir eine Aufstellung aller überhaupt möglichen Positionen mit 4 Feldern und bestimmen nacheinander die Werte nach der Einfachheitsregel (Abbildung 3.18).

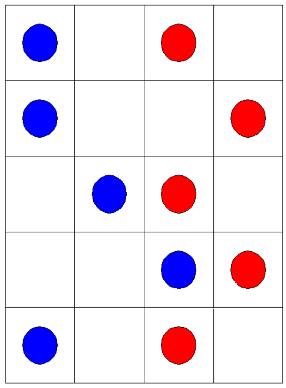


Abbildung 3.17: Kröten und Frösche

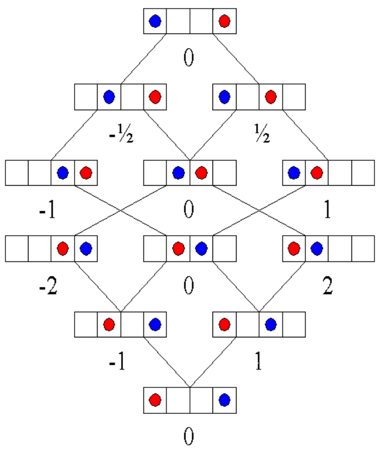


Abbildung 3.18: Positionen von Kröten-und-Frösche

Die unterste Stellung ist ersichtlicherweise eine Nullposition, denn keiner der Spieler kann noch ziehen. Die Positionen darüber bieten Links bzw. Rechts einen Zug Vorsprung. In der Reihe darüber sind die beiden äußeren Positionen simpel: Links bzw. Rechts hat 2 Züge Vorsprung. Die Position in der Mitte ist wiederum eine Nullposition, denn der am Zug befindliche Spieler muss die für ihn nachteilige Stellung darunter herbeiführen. Die Stellungen in der 3.Zeile außen sind etwas komplizierter: Nehmen wir z.B. die linke Position. Links kann hier keinen weiteren Zug machen, Rechts am Zug muss eine Nullposition herbeiführen. Somit hat die Stellung den Wert $\{|\,0\} = -1$ (nach der Regel, dass $-n-1 = \{|\,-n\}$ ist). Analog hat die Stellung rechts außen den Wert 1. Die Position in der Mitte ist eine Nullposition, der Spieler am Zug muss eine für ihn ungünstige Position herbeiführen. Die beiden Positionen in der zweiten Reihe haben die Werte $\{-1|\,0\} = -\frac{1}{2}$ bzw. $\{0|\,1\} = \frac{1}{2}$, und die oberste ist wieder eine Nullposition.

Nunmehr können wir ganz einfach den Wert der Stellung in Abbildung 3.17 bestimmen: Er lautet $\frac{1}{2} + 0 + 0 + (-1) + \frac{1}{2} = 0$, also gewinnt der Spieler, der gerade nicht am Zug ist.

3.3 Nim und Nim-Zahlen - das neutrale Spiel

Was ist ein neutrales Spiel?

Bis jetzt haben wir uns nur mit Spielen befasst, bei denen die Spieler verschiedenartige Züge machen (d.h.: Trennung blau-rot, horizontal-vertikal). Bei einem neutralen Spiel dürfen beide Spieler in der gleichen Situation die exakt gleichen Züge machen, Trennung gibt es nicht. Die dazugehörige Hackenbush-Version arbeitet mit grünen Kanten, die von beiden Spielern genommen werden dürfen, doch dieses Spiel möchte ich einstweilen beiseite lassen. Stattdessen wende ich mich einem anderen Klassiker der kombinatorischen Spieltheorie zu, nämlich dem Spiel Nim, das von *C.L.Bouton* analysiert wurde:

Dieses Spiel besteht aus Haufen von Steinen (Münzen,...). In jedem Zug darf der Spieler eine beliebige Menge von einem beliebigen Haufen nehmen. Sieger ist derjenige, der den letzten Stein nimmt.
Wir stoßen hier gleich auf eine neue Form des Werts: Es gibt Positionen, bei denen der am Zug befindliche Spieler gewinnt! Ein triviales Beispiel dafür ist die Position mit genau einem Haufen mit einem Stein. Welchen Wert geben wir dieser Position? 0 kann es nicht sein, denn dann würde der Spieler am

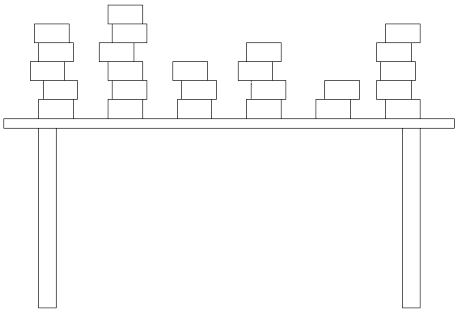


Abbildung 3.19: Eine einfache Nim-Position

Zug verlieren. Die Position gibt aber auch keinem der Spieler einen Vorteil (der jeweilige Vorteil ist vom Zugrecht abhängig, nicht von der Position!), also ist der Wert auch nicht positiv oder negativ. Wir müssen ein neues Zeichen einführen, nämlich $*$, gesprochen "Stern". Die dazugehörige Spielsituation, nämlich dass der am Zuge befindliche Spieler gewinnt, nennen wir "unscharf". Bei Nim, genauso wie bei allen anderen neutralen Spielen, gibt es nur unscharfe und Nullpositionen, keine Stellung ist unabhängig vom Zugrecht zu gewinnen.

Wie soll man nun einem solchen Spiel beikommen?

Dazu führen wir gleich noch einen neuen Begriff ein, nämlich den der Nim-Zahlen. Ein einzelner Haufen mit n Steinen habe den Nim-Wert $*n$ (Sprich: "Nim-n"), ein Spiel aus mehreren Haufen sei als die Summe aller dieser Nim-Zahlen definiert. Die zu erreichende Situation (alle Steine entfernt) hat klarerweise den Wert $*0$, und alle weiteren Nullpositionen haben auch den Wert $*0$. Alle anderen Nim-Werte ($*1$, $*2$, ...) sind unscharf. Versuchen wir nun, ein wenig Nim-Arithmetik zu betreiben:

Paare gleich großer Haufen heben sich auf, denn wenn ein Spieler eine beliebige Anzahl von einem Haufen nimmt, kann der andere Spieler die gleiche Anzahl vom anderen Haufen nehmen. So geht das stets weiter, bis nichts mehr vorhanden ist. Damit gewinnt der zweite Spieler, wir haben es also mit einer Nullposition zu tun. Dies können wir anschreiben als: $*n + *n = *0$

Andererseits ergibt die Summe zweier ungleicher Stapel wieder ein unscharfes Spiel und damit eine Nimzahl, denn es kann durch Herabsetzen des größeren Haufens auf die Größe des kleineren Haufens gewonnen werden. Betrachten wir nun etwa das Spiel mit drei Stapeln zu 1, 2 und 3 Steinen. Es ist eine Nullposition, denn jeder Zug verliert: Reduzieren eines Haufens auf 0 Steine hinterlässt 2 ungleiche Stapel und damit eine unscharfe Position. Der Zug, der den 2-er Stapel auf einen Stein reduziert, wird durch Wegnahme des gesamten 3-er Stapels beantwortet. Nimmt man vom 3-er Stapel 1 oder 2 Steine, so hinterlässt man 2 gleiche Stapel, was durch Wegnahme des dritten Haufens beantwortet wird. Somit können wir schreiben:

$$*1 + *2 + *3 = *0 \text{ oder } *1 + *2 = *3 \text{ oder } *2 + *3 = *1 \text{ oder } *3 + *1 = *2$$

Ähnlich kann man auch die Formeln $*1 + *4 + *5 = *0$ und $*2 + *4 + *6 = *0$ herleiten. Mit diesem Wissen können wir uns schon in Nim-Arithmetik üben:

$$*3 + *5 = *1 + *2 + *5 = *2 + *4 = *6 \Rightarrow *3 + *5 + *6 = *0$$

Wir haben also eine weitere Gleichung hergeleitet - und siehe da, die Stellung mit 3 Haufen zu 3, 5 und 6 Steinen ist tatsächlich eine Nullposition.

Nun könnte man eine große Nim-Additionstafel anlegen, um schwierigere Additionen durchzuführen, aber es gibt ein System, mit dem man beliebige Nim-Additionen schnell durchführen kann. Dieses System verwendet nur 2 Regeln:

- Die Nim-Summe von verschiedenen Zweierpotenzen ist gleich ihrer gewöhnlichen Summe, z.B. $*4 + *8 = *12$ oder $*2 + *16 = *18$.
- Die Nim-Summe gleicher Zahlen ist Null.

Somit kann man folgendermaßen addieren:

Man schreibt die Zahlen als Summe verschiedener Zweierpotenzen an (das ist immer möglich - gewöhnliche Binärdarstellung) und streicht Paare gleicher Potenzen weg. Abschließend kann man gewöhnlich addieren. Beispiele dafür sind:

$$\begin{aligned}
*5 + *8 + *14 &= (*1 + *4) + (*8) + (*2 + *4 + *8) \\
&= *1 + *2 = *3 \\
*17 + *30 + *57 &= (*1 + *16) + (*2 + *4 + *8 + *16) + (*1 + *8 + *16 + *32) \\
&= *2 + *4 + *16 + *32 = *54
\end{aligned}$$

Anders angeschrieben entspricht dieses System einer Addition im Zweiersystem ohne Übertrag:

5	=	0101	17	=	010001
8	=	1000	30	=	011110
14	=	1110	57	=	111001
3	=	0011	54	=	110110

Die Sprague-Grundy-Theorie für neutrale Spiele:

R.P.Sprague und P.M.Grundy haben unabhängig voneinander gezeigt, dass man die Theorie der Nim-Zahlen auf alle neutralen Spiele überhaupt übertragen kann.

Dazu brauchen wir zuerst einmal einen neuen Begriff, nämlich den der Summe zweier Spiele:

Es seien S und T zwei Spiele, bei denen es sich sogar um einfache einzelne Nim-Haufen handeln kann. Dann ist ihre Summe S+T = U nichts anderes als beide Spiele nebeneinander, wobei jeder Spieler in jedem Zug nur in genau einer der Komponenten ziehen darf. So ist etwa das Spiel aus 2 Nim-Haufen zu 3 und 5 Steinen die Summe der beiden Spiele, die aus je einem Nim-Haufen zu 3 bzw. 5 Steinen bestehen.

Nun betrachten wir einmal das Spiel Poker-Nim. Es funktioniert genauso wie das bereits bekannte Nim, allerdings dürfen die Spieler bereits genommene Steine anstelle eines normalen Zuges auf einen der Haufen legen. Was ist zu diesem Spiel zu sagen? Die Antwort ist äußerst einfach - wer eine Position beim normalen Nim gewinnen kann, kann dies auch beim Poker-Nim! Denn legt der Gegner eine bestimmte Anzahl Steine auf einen Haufen, dann nimmt man sie einfach alle wieder weg. Auf diese Weise hilft dem Gegner seine Vorgehensweise nicht, irgendwann werden ihm die Steine ausgehen. Also gibt es keinerlei strategischen Unterschied zwischen Nim und Poker-Nim.

Durch Anpassung dieses Arguments kann man alle neutralen Spiele auf die Form des Nim zurückführen. Dabei hilft die sogenannte Mex-Regel.

Die Mex-Regel:

Wir sehen uns dazu zunächst das neutrale Spiel - nennen wir es S -

$$\{*0, *1, *2, *4, *7, *8, *11| * 0, *1, *2, *4, *7, *8, *11\}$$

an, wobei links die Optionen für Links stehen, rechts die für Rechts. Im Grunde ist das nichts als eine etwas eigenartige Form von Nim-Haufen: Man kann aus ihm einen gewöhnlichen Haufen der Größe 0,1,2,4,7,8 oder 11 machen. Dazu können wir uns einen Haufen der Größe 3 vorstellen (Dies ist die erste Zahl, die fehlt!), von dem aus man auch einen Haufen der Größe 4,7,8 oder 11 erreichen kann. Die letztere Option erweist sich als belanglos, denn aufgrund des vom Poker-Nim her bekannten Arguments nützt das dem Spieler nichts. Um es etwas mathematischer auszudrücken: Hat der Spieler am Zug für das Spiel $*3+T+U+\ldots$, wobei $T, U, \ldots$ weitere Spiele sind, etwa weitere Nim-Haufen, eine Gewinnstrategie, so hat er sie auch für $S+T+U+\ldots$, denn die zusätzliche Freiheit, die S bietet, kann ihm ja nicht schaden. Verliert dagegen der Spieler am Zug $*3+T+U+\ldots$, so hilft ihm auch die zusätzliche Freiheit nichts, wie das beim Poker-Nim angewandte Argument zeigt, und er verliert auch bei $S+T+U+\ldots$. Somit sind die Spiele $*3+T+U+\ldots$ und $S+T+U+\ldots$ gleichwertig, und S kann wie $*3$ behandelt werden. Diese Vorgehensweise lässt sich auf alle neutralen Spiele anwenden, denn alle haben die Elementarposition $*0$ gemeinsam, und somit lassen sie sich schrittweise auf Nim-Zahlen (nach der eben genannten Methode) reduzieren.

Diese Methode kann man auch allgemein als Regel formulieren. Sie heißt Mex-Regel, der Name entstammt dem Englischen (**m**inimal **ex**cluded number):

Satz 4 *Haben Links und Rechts in einem bestimmten Spiel die gleichen Optionen (Definition des neutralen Spiels) $*a, *b, *c, \ldots$, dann entspricht diese Position dem Nim-Haufen $*n$, wobei n die kleinste natürliche Zahl ist, die nicht unter den Zahlen $a, b, c, \ldots$ vorkommt.*

Beispiele für neutrale Spiele, die so analysiert werden können, finden sich in Teil III.

3.4 Go-Moku und n-in-einer-Reihe - die Hales-Jewett-Paarung:

Vier-gewinnt ist ein bekanntes und beliebtes Gesellschaftsspiel, das es in diversen Ausführungen gibt. Für Mathematiker ist natürlich immer die Verallgemeinerung solcher Dinge interessant. Für unsere Betrachtungen wollen wir einmal die Schwerkraft vernachlässigen[4] und unser Spiel auf einem beliebig großen karierten Feld spielen. Abwechselnd setzen die Spieler einen Spielstein ihrer Farbe (oder färben ein Feld in ihrer Farbe, ...). Sieger ist, wem es gelingt, n Steine in eine Reihe zu bringen, wobei n eine festgelegte positive ganze Zahl ist.

Es ist leicht ersichtlich, dass es stets besser oder zumindest gleich gut ist, einen Stein zu setzen als dies zu unterlassen. Somit gilt Satz 1.2., weshalb entweder Links gewinnen oder Rechts ein Unentschieden forcieren kann. Es stellt sich uns nunmehr die Frage, für welche n was der Fall ist. Klar ist jedenfalls, dass Links für $n = 1, 2, 3, \ldots, k-1$ gewinnen kann, sollte er dies auch für $n = k$ können. Somit bleibt nur noch die Suche übrig, welches das maximale n ist, für das Links gewinnen kann. Dazu gibt es 2 Fälle:

1.Fall: Die Reihe darf nur waagrecht oder senkrecht sein.

Sehr leicht lässt sich eine allgemeine Strategie finden, wie man 4-in-einer-Reihe unter diesen Voraussetzungen gewinnen kann. Als schon schwieriger erweist sich das Problem, zu beweisen, dass dies für $n = 5$ nicht mehr möglich ist. Für solche Zwecke haben die Mathematiker A. W. Hales und R. I. Jewett eine geniale Methode gefunden, die man nach ihnen die Hales-Jewett-Paarung nennt (Abb. 3.20).
Man sieht, dass immer 2 Felder durch eine Linie verbunden sind. Die Strategie von Rechts besteht nun darin, auf die Besetzung eines Feldes durch den Gegner mit der unverzüglichen Besetzung des damit verbundenen Feldes zu reagieren. Dadurch erreicht man stets ein Unentschieden, denn wie auch immer 5 Felder in einer waagrechten oder senkrechten Reihe angeordnet sind, sie bedecken ein Paar. Also müsste Links zum Sieg irgendein Paar vollständig besetzen, was Rechts mit seiner Strategie unmöglich macht.

[4] Bei Vier-Gewinnt darf bekanntlich nur "obenauf" gesetzt werden, was in der Praxis durch das Einwerfen der Spielsteine realisiert wird.

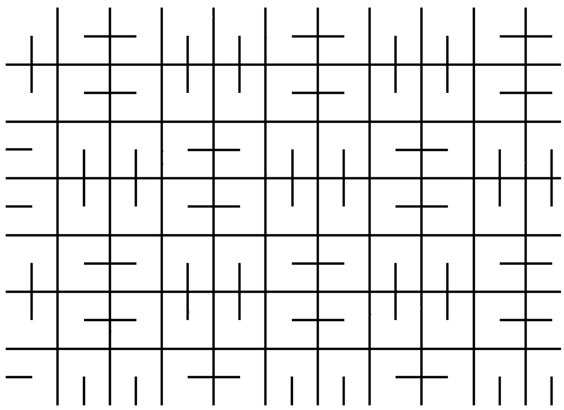


Abbildung 3.20: Hales-Jewett-Paarung

Somit lautet die Antwort für den ersten Fall $n = 4$, doch was ergibt sich für den zweiten?

2.Fall: Die Reihe darf auch diagonal sein.

Dies ist eines der noch immer ungelösten Probleme in der Spieltheorie. Die einzigen bekannten Grenzen sind, dass es für 5-in-einer-Reihe (diese Form wird auch Go-Moku oder Go-Bang genannt) eine sichere Gewinnstrategie gibt, und dass 8-in-einer-Reihe sicher unentschieden ist. Für 9-in einer-Reihe gibt es eine wunderschöne Hales-Jewett-Paarung (Abb. 3.22), und für 8-in-einer-Reihe hat eine Gruppe aus Amsterdam unter dem Pseudonym T.G.L. Zetters eine kompliziertere Paarung gefunden. Über die Fälle $n = 6$ und $n = 7$ weiß man aus mathematischer Sicht noch eigentlich nichts. Rein intuitiv dürften diese beiden Fälle zwar bei bestem Spiel unentschieden enden, wie ich mir von einem Experten des Fachs versichern ließ, doch bleibt der mathematisch exakte Beweis ausständig, zumal es an brauchbaren Methoden für eine solche Beweisführung mangelt. Dieses Spiel bleibt also wohl noch längere Zeit eines von jenen Problemen, die zwar leicht formuliert, aber schwer zu behandeln sind.[5]

[5]Dieses Problem wurde sogar 1994 für die internationale Mathematik-Olympiade vorgeschlagen, allerdings für 11-in-einer-Reihe

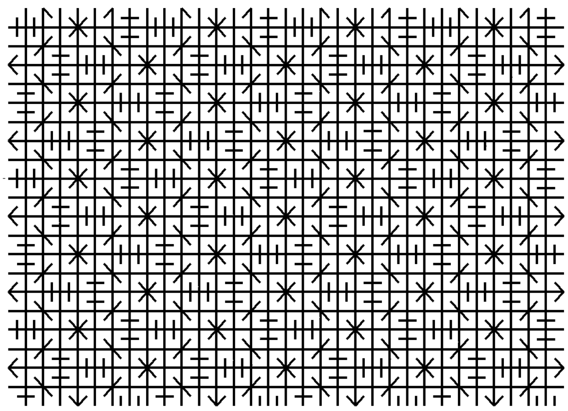


Abbildung 3.21: Hales-Jewett-Paarung für 9-in-einer-Reihe

Frank Harary hat eine weitere Verallgemeinerung dieses Spiels vorgeschlagen: Die Spielregeln bleiben gleich, jedoch soll nicht einfach eine gerade Linie erzeugt werden, sondern ein beliebiges Polyomino (abgeleitet von Domino), d.h. eine zusammenhängende Anordnung von Einheitsquadraten. Es gewinnt, wer die vorgegebene Form bilden kann.

Wir nennen ein Polyomino einen Gewinner, wenn Links einen Gewinn forcieren kann, andernfalls einen Verlierer. Bis auf eine Ausnahme ist das Problem für alle Polyominos gelöst.

Es muss freilich darauf hingewiesen werden, dass jedes Polyomino, das einen Verlierer beinhaltet, selbst auch ein Verlierer sein muss. Abbildung 3.22 zeigt zunächst alle Gewinner. Die "Schlange" aus 6 Quadraten ist der angesprochene ungelöste Fall. Vermutlich ist er auch ein Gewinner, es ist jedoch noch nicht vollständig bewiesen, dass es so ist. Für die übrigen Figuren ist eine sichere Gewinnstrategie bekannt. Die Verlierer kann man andererseits allesamt mit Hales-Jewett-Paarungen bestimmen (Abb. 3.23).

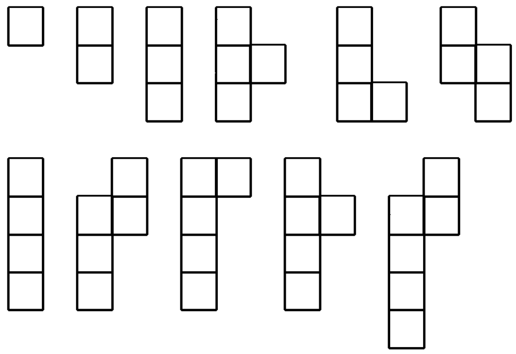


Abbildung 3.22: Alle Gewinner-Polyominos

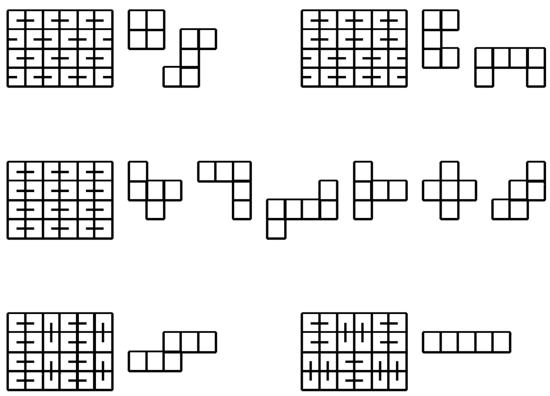


Abbildung 3.23: Hales-Jewett-Paarungen für alle Verlierer

Ich selbst habe noch ein weiteres ähnliches Spiel analysiert, das auf einem Feld aus gleichseitigen Einheitsdreiecken gespielt wird.[6] Hierbei geht es darum, Polyamonds (Abgeleitet vom englischen Wort für Karo - diamonds) zu bilden. Eine detaillierte Analyse findet sich unter den Beispielen in Teil III.

Es wurde sogar über Spiele in mehreren Dimensionen nachgedacht, so hat etwa *S.W. Golomb* eine Hales-Jewett-Paarung für 8-in-einer-Reihe in einem $8 \times 8 \times 8$-Würfel gefunden. Hales und Jewett haben n-in-einer-Reihe in einem k-dimensionalen $n \times n \times \ldots \times n$-Hyperwürfel untersucht und bewiesen, dass Links gewinnen kann, wenn k groß gegen n ist. Umgekehrt endet das Spiel unentschieden, wenn n sehr groß gegen k ist. Über den Fall jedoch, dass k und n annähernd gleich groß sind, ist nichts bekannt.

[6] Jedenfalls konnte ich dieses Spiel in keiner meiner Quellen finden, womit freilich nicht garantiert ist, dass keiner vor mir diese einfachen Analysen vorgenommen hat. Ich bezweifle stark, dass ich der erste bin.

Kapitel 4

“Ad hoc”-Methoden zur Analyse kombinatorischer Spiele

Im vorigen Kapitel wurden “klassische” Methoden gezeigt, wie sie von großen Spieltheoretikern ausgearbeitet worden sind. Nun soll gezeigt werden, dass man zuweilen auch mit einfachen “Tricks” durchkommen kann und sich so etwa die langwierigen Anwendungen der eben vorgeführten Regeln erspart. Manche von diesen “Tricks” funktionieren sehr oft und sehr gut, weshalb ich sie hier kurz vorzeigen möchte:

4.1 Rückwärtsinduktion und die Suche nach Gewinnstellungen

Weil sich bekanntlich alles leichter an einem Beispiel erklären lässt, möchte ich auch hier auf ein solches zurückgreifen:

Alice und Bob haben ein Stück Schokolade, von dem in jedem Zug eine Rippe beliebiger Größe abgebrochen und aufgegessen wird, wobei die Bruchlinie entlang der vorgegebenen Trennlinien verlaufen und ganz durchgehen muss. Es verliert, wer das letzte Stück in der Ecke essen muss, denn dieses ist schimmlig und damit ungenießbar.

Man erkennt sofort, dass es sich hierbei um ein neutrales Spiel handelt, denn beide machen exakt die gleichen Züge. Es läge also nahe, die Theorie der Nim-Zahlen hierauf anzuwenden. Es geht jedoch auch schneller und eleganter:

Wir nennen eine Stellung eine Gewinnstellung, wenn es gewinnträchtig ist, sie zurückzulassen, eine Verluststellung, wenn dies nicht der Fall ist. So ist das 1×1-Quadrat eine triviale Gewinnstellung, denn wenn man sie zurücklässt, dann muss der Gegner dieses Stück essen. Wir versuchen nun, weitere solche Gewinnstellungen zu finden. Dabei hilft uns folgende Feststellung:

Satz 5 *Eine Gewinnstellung ist genau dann gegeben, wenn es nicht möglich ist, aus ihr eine andere Gewinnstellung zu erreichen. Man findet somit weitere Gewinnstellungen, indem man die kleinste Stellung nimmt, von der aus keine der zuvor gefundenen erreichbar ist.*

Dies ist nun nicht allzu schwer einzusehen, denn wenn man aus einer Stellung heraus keine Gewinnstellung erreichen kann, muss man zwangsläufig eine Verluststellung erzeugen und verliert somit. Dann muss es sich bei dieser Stellung wieder um eine Gewinnstellung handeln.

Versuchen wir, das soeben gewonnene Wissen anzuwenden:

Aus der Tatsache, dass 1×1 eine Gewinnstellung ist, erhalten wir, dass $1 \times n$ bzw. $n \times 1$ eine Verluststellung sein muss, sofern $n > 1$ ist. Die kleinste Stellung, die nun übrigbleibt, ist 2×2, und diese muss somit unsere nächste Gewinnstellung sein. Dies ist auch nicht schwer zu zeigen: Der am Zug befindliche Gegner muss eine 1×2 oder eine 2×1-Tafel zurücklassen (oder gleich alles - einschließlich das schimmlige Stück - essen), worauf man auf 1×1 reduzieren kann.

Damit fallen alle Positionen der Form $2 \times n$ oder $n \times 2$ mit $n > 2$ als Verluststellungen weg, und die nächstkleinere Position ist 3×3. Man beginnt bereits, eine gewisse Regelmäßigkeit zu erkennen, und vermutet, dass alle Gewinnstellungen Quadrate sind und umgekehrt. Dies lässt sich auch leicht mittels vollständiger Induktion zeigen:

Für den Fall des 1×1-Quadrats haben wir schon alles gezeigt. Nehmen wir nun an (Induktionsvoraussetzung), dass unsere Behauptung für das 1×1, das 2×2, das 3×3, ..., $n \times n$-Quadrat gilt. Bricht man nun vom $(n+1) \times (n+1)$-Quadrat eine Rippe ab, so bleibt eine Stellung der Form $(n+1) \times k$ übrig, wobei $k < n+1$ ist. Dies kann man nun zu $k \times k$ reduzieren, was nach Voraussetzung eine Gewinnstellung ist. Damit ist jedoch gezeigt, dass $(n+1) \times (n+1)$ auch eine Gewinnstellung ist, denn unabhängig vom Zug des Gegners kann man wieder eine Gewinnstellung erreichen.

Diese Vorgangsweise wird deshalb auch Rückwärtsinduktion genannt, weil von der abschließenden Gewinnstellung ausgegangen wird und auf die davor zu erreichenden Gewinnstellungen rückgeschlossen wird.

Ein anderes Beispiel möchte ich noch bieten, bei dem das gleiche Prinzip in etwas anderer Weise genutzt werden kann:

Auf einem Schachbrett steht auf h1 ein König (in der rechten unteren Ecke). Die Spieler Links und Rechts dürfen den König abwechselnd ein Feld nach links, nach oben oder nach links oben ziehen. Es gewinnt, wer den König auf a8 (die linke obere Ecke) zieht.

Wieder versuchen wir die Methode der Gewinnstellungen. Zweifelsohne ist die Position a8 (ich benenne mit dem Wort Position im Folgenden einfach das Feld, auf dem der König steht) eine Gewinnstellung. Welche Felder sind weitere solche? Nun, b8, a7 und b7 sind sicher Verluststellungen, denn von ihnen aus kommt man auf a8. Da man von c8 und a6 nur auf b8 bzw. a7 ziehen kann, müssen diese Felder weitere Gewinnstellungen sein. Damit sind nun c7 und b6 wieder Verlustpositionen, denn von ihnen aus kommt man auf die genannten Felder, etc.

Durch wiederholte Anwendung dieses Gedankengangs kommt man auf das folgende Muster von Feldern, die Gewinnpositionen darstellen:

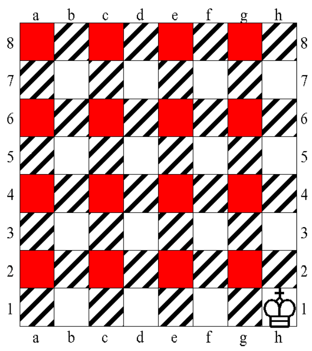


Abbildung 4.1: Die Gewinnfelder des Königs (rot markiert)

Man kann sich sehr leicht davon überzeugen, dass alle markierten Felder Gewinnpositionen darstellen: Von keinem markierten Feld kommt man direkt auf ein weiteres markiertes Feld, denn ihr Abstand beträgt jeweils mindestens

2 Felder. Andererseits kommt man von jedem nicht-markierten Feld auf ein markiertes, von den schwarzen Feldern aus, indem man nach oben bzw. links zieht, von den weißen, indem man nach links oben zieht. Aus unseren Beobachtungen ergibt sich nun auch, dass Links gewinnen kann, und zwar, indem er mit dem König auf g2 zieht.

4.2 Symmetrie im Spiel

Sehr häufig führt die einfache Strategie, dem Gegner die Züge in irgendeiner Form spiegelverkehrt nachzumachen, zum Ziel. Ein einfaches Beispiel für eine Strategie, die auf Symmetrie aufbaut, haben wir bereits kennengelernt: Beim Nim, das aus 2 gleich großen Haufen besteht, kann der zweite Spieler stets gewinnen, indem er den Zug des Gegners für den anderen Haufen nachmacht. Diese Art von Strategie tritt sehr häufig auf, wie die folgenden Beispiele zeigen sollen:

Links und Rechts legen abwechselnd Münzen (Bierdeckel,...) auf einen kreisrunden Tisch. Diese dürfen einander jedoch nicht überdecken. Wer keine weitere Münze setzen kann, verliert.

Der erste Gedanke ist, dass Rechts gewinnen kann, indem er jede Münze, die Links setzt am Mittelpunkt spiegelt. Dadurch bleibt die Spielsituation stets punktsymmetrisch. Wenn dann Links einen möglichen Zug macht, dann muss auch der punktsymmetrische Zug noch möglich sein. Eine weitere Idee zeigt jedoch, dass dies nicht klappt, sondern dass Links gewinnen kann: Er setzt einfach zu Beginn direkt auf den Mittelpunkt! Dieser Zug kann nicht symmetrisch nachgemacht werden, also kann Links gewinnen, indem er nun jeden Zug punktsymmetrisch spiegelt.
Ein anderes Spiel zeigt, dass auch Rechts von einer solchen Strategie profitieren kann, und dass es nicht immer Punktsymmetrie sein muss:

Wieder spielen Links und Rechts ein Spiel, bei dem es um ein Schachbrett geht. Sie setzen abwechselnd Läufer auf ein Schachbrett, die sich nicht gegenseitig bedrohen dürfen. Es verliert, wer keinen Läufer mehr setzen kann.

Wieder denkt man sofort an Symmetrie, denn das Schachbrett ist ja von Natur aus sehr symmetrisch. Doch die Idee mit der Spiegelung am Mittelpunkt hilft uns in diesem Fall nichts, denn wird ein Läufer auf einer der langen Diagonalen gesetzt, dann ist die Spiegelung am Mittelpunkt nicht erlaubt, da sich die Läufer dabei ja bedrohen würden. Doch das Schachbrett hat eine

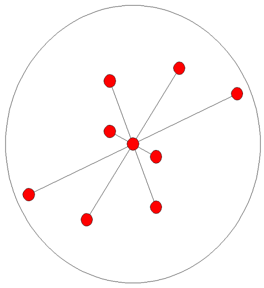


Abbildung 4.2: Die Gewinnstrategie beim Münzenlegen: Links setzt zuerst in die Mitte, um anschließend jeden Zug punktsymmetrisch zu spiegeln

weitere Symmetrie, eine axiale Symmetrie: Man kann problemlos jeden Zug des Gegners an der Mittellinie spiegeln, denn dabei ändert sich die Feldfarbe des Läufers (die Farbe des Feldes, auf dem er steht), und da ein Läufer nur Felder der eigenen Feldfarbe bedrohen kann, bedrohen sich ein Läufer und sein Spiegelbild nicht. Somit kann diesmal Rechts durch Spiegelung gewinnen, denn auf die Mittellinie (so wie oben auf den Mittelpunkt) kann Links nicht setzen.

Ein letztes Spiel, bei dem es um Symmetrie geht:

Links und Rechts haben vor sich ein rechteckiges Feld aus Spielsteinen. Abwechselnd dürfen sie eine beliebige Reihe (d.h. beliebig viele Steine, die eine durchgehende gerade Linie bilden) entfernen. Es gewinnt, wer das letzte Feld entfernt.

Hier sieht man, dass es mitunter von Randbedingungen abhängen kann, wer von der Symmetrie profitiert. Im vorliegenden Fall gewinnt Rechts genau dann, wenn beide Seiten des Rechtecks eine gerade Seitenlänge haben. Dann kann er tatsächlich die Strategie der punktsymmetrischen Spiegelung anwenden. Hat jedoch eine der beiden Seiten eine ungerade Seitenlänge, so hat diese Seite eine Mittellinie, die Links im ersten Zug vollständig entfernt und von da an eine axialsymmetrische Spiegelung anwendet: Mit seinem ersten Zug hat er das Spielfeld in zwei Komponenten geteilt, sodass er jeden Zug von Rechts in der jeweils anderen Komponente nachahmen kann.

Zum Abschluss der kombinatorischen Spieltheorie soll noch gezeigt werden, dass manchmal gar keine tiefgründige Strategie notwendig ist, um zu gewinnen.

4.3 Spiele, die keiner Strategie bedürfen

Alice und Bob haben wieder eine Tafel Schokolade, die jedoch diesmal völlig genießbar ist. Um sie zu teilen, spielen sie folgendes Spiel: Abwechselnd dürfen die beiden ein Stück nehmen und entlang der Linien in 2 Teile zerbrechen. Es gewinnt, wer nur noch einzelne Sücke zurücklässt, die nicht mehr zerbrochen werden können.

Für den Fall, dass eine der Seitenlängen der Schokolade gerade ist, sehen wir sofort eine Strategie für Alice: Sie teilt das Stück in zwei gleiche Teile und ahmt jeden Zug von Bob nach - eine Symmetrie-Strategie. Aber ist das ihre einzige Möglichkeit? Überlegen wir uns die Sache einmal so: Bei jedem Zug wird die Anzahl der Bruchstücke um genau 1 größer. Am Anfang beträgt sie 1, am Ende sollte sie mn betragen, wobei m und n die Seitenlängen der rechteckigen Schokoladetafel sind. Bis dorthin können somit genau $mn - 1$ Züge gemacht werden. Da Alice den ersten Zug macht, gewinnt sie genau dann, wenn diese Anzahl ungerade ist, Bob, wenn sie gerade ist, unabhängig davon, was die beiden ziehen. Dies ist genau dann der Fall, wenn m oder n gerade ist (Das Produkt zweier Zahlen ist genau dann gerade, wenn mindestens einer der Faktoren gerade ist), also gewinnt Alice immer dann, wenn zumindest eine der Seitenlängen der Schokoladentafel gerade ist.

Das folgende Spiel erinnert stark an ein solches, das im Kapitel 4.2 gezeigt wurde:

Links und Rechts setzen diesmal abwechselnd Türme auf ein Schachbrett, die sich gegenseitig nicht berühren dürfen. Es verliert, wer keinen Turm mehr setzen kann.

Nun erinnern wir uns, was wir beim analogen Spiel mit Läufern getan haben. Die Axialsymmetrie des Schachbretts kann uns diesmal nicht helfen, wohl aber die Punktsymmetrie: zwei Türme, die spiegelsymmetrisch zum Mittelpunkt des Schachbretts stehen, stehen sicher in verschiedenen Linien und Reihen, bedrohen einander also nicht. Also gewinnt Rechts, doch kann er überhaupt verlieren, egal, wie gut oder schlecht er spielt?

Die Antwort lautet nein, und das kann man auch leicht zeigen:

In jeder Linie und Reihe darf nur ein Turm stehen, also "sperrt" jeder Zug genau eine Reihe und genau eine Linie für weitere Türme. In jedem Zug muss sich der jeweilige Spieler eine noch übriggebliebene Linie und eine ebensolche

Reihe suchen, und den Turm auf deren Schnittpunkt platzieren. Da es genau 8 Linien und 8 Reihen gibt, sind damit genau 8 Züge möglich, unabhängig, was gezogen wird, denn in jedem Zug wird genau eine freie Linie und eine freie Reihe verbraucht. Den 8.Zug macht jedoch stets Rechts, und somit gewinnt er immer.

Teil II

Ökonomische Spieltheorie

Kapitel 5

Was ist nun ein ökonomisches Spiel?

Während wir uns bisher eher “harmlosen” Spielen zugewandt haben, ist nun der Teil an der Reihe, der eine stärkere Praxisbezogenheit aufweisen kann. Mancherlei Grundprinzipien - wie zum Beispiel Spielbäume - bleiben uns erhalten, aber es treten neue Aspekte hinzu, die einer anderen Art von Zugang bedürfen. “Ökonomisch” nenne ich solche Spiele deshalb, weil ihr Hauptanwendungsgebiet in der Wirtschaft liegt, aber auch in der Soziologie, der Politik, ja sogar der Biologie.

Die beiden wichtigsten Neuerungen, die auf uns zukommen, sind folgende:

- Es wird möglich sein, dass die Teilnehmer an einem Spiel gleichzeitig ziehen.
- Es gibt nicht mehr nur gewinnen und verlieren, sondern alle denkbaren Gewinnwerte sind möglich. Im Idealfall handelt es sich um ein Nullsummenspiel, d.h. um ein solches, bei dem die Summe aller Gewinne unabhängig vom Ausgang des Spiels konstant ist.

Gleich eine Gesetzmäßigkeit möchte ich festhalten, die sich auf den ersten Punkt bezieht:

> Bei einem Spiel, bei dem alle gleichzeitig ziehen und die gleichen Zugmöglichkeiten haben, und bei dem alle Mitspieler gleich rational (sogar perfekt rational) sind, muss die perfekte Spielstrategie (sofern es eine eindeutige gibt) für alle gelten. Daher kann man annehmen, dass alle die gleiche Strategie wählen und in jedem Zug dasselbe ziehen.

Ein sehr bedeutendes Beispiel für die Verwendung dieses Gedankens möchte ich gleich jetzt geben. Es handelt sich dabei um eine Anwendung aus der Wirtschaftswissenschaft:

Wir machen nun eine sehr idealisierte Momentaufnahme im beinharten Konkurrenzkampf zwischen den verschiedenen Firmen einer Branche. Dazu versetzen wir uns in die Lage einer der n Firmen, die ein bestimmtes Produkt erzeugen. Zur Vereinfachung nehmen wir gleich an, dass alle Firmen in unbegrenzter Stückzahl produzieren können und alle gleiche Qualität sowie gleiche Stückkosten c aufweisen.[1] Die Firma steht nun vor der schwierigen Frage, welche Stückzahl q sie auf den Markt bringen soll. Sie weiß, dass sich im Moment Q Stück von anderen Anbietern am Markt befinden. Die Nachfrage wird als konstant angenommen, und dem Gesetz von Angebot und Nachfrage wird Rechnung getragen, indem der Preis p durch die Preisfunktion N als $p = N(Q) = kQ^{-\varepsilon}$ definiert wird, wobei k und ε positive Konstanten sind. In diesem Fall ist nämlich die sogenannte Preiselastizität konstant. Mit diesem Wissen kann sich die Firma nun ihren Gewinn G nach folgender Formel in Abhängigkeit von q bestimmen:

$$G = (p - c)q = (N(Q + q) - c)q = (k(Q + q)^{-\varepsilon} - c)q$$

Nun möchte diese Firma sicherlich ihren Gewinn maximieren, es handelt sich somit um eine einfache Extremwertaufgabe. Um das Maximum zu finden, muss man die erste Ableitung dieser Gleichung nach q bilden und sie gleich 0 setzen:[2]

$$\begin{aligned} G' &= k(Q+q)^{-\varepsilon} - c - k\varepsilon(Q+q)^{-\varepsilon-1}q \\ 0 &= k(Q+q)^{-\varepsilon} - c - k\varepsilon(Q+q)^{-\varepsilon-1}q \\ c &= k(Q+q)^{-\varepsilon}\left(1 - \frac{\varepsilon q}{Q+q}\right) \end{aligned}$$

Wenn diese letzte Gleichung erfüllt ist, ist der Gewinn also maximal. Nun setzen wir noch für den Ausdruck $k(Q + q)^{-\varepsilon}$ p ein und erhalten:

$$c = p\left(1 - \frac{\varepsilon q}{Q+q}\right)$$

Jetzt hilft uns obige Beobachtung weiter: Dieser Berechnung werden nun nämlich auch alle anderen $n - 1$ Firmen folgen, und man kann $Q = (n - 1)q$

[1]Dies ist selbstverständlich nur bei sehr einfachen Produkten realistisch – wenn überhaupt.

[2]Siehe z.B. Reichel-Müller-Hanisch-Laub: "Lehrbuch der Mathematik", Band 7, S.130ff

setzen, womit sich die Gleichung wie folgt ändert:

$$c = p\left(1 - \frac{\varepsilon q}{nq}\right) = p\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \text{ bzw. } \frac{p}{c} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)^{-1}$$

Die letztere Gleichung stellt nun eine Formel für das Verhältnis Preis-Kosten dar. Für den Fall $n = 1$, also für einen Monopolisten, hat man den maximalen Gewinn, der überhaupt möglich ist, sofern man der optimalen Strategie folgt. Damit ist auch mathematisch bestätigt, was ohnehin allgemein bekannt ist: ein Monopol ist Goldes wert.

Für den Spezialfall hingegen, dass n gegen unendlich strebt, also für den theoretisch optimalen freien Markt, erhalten wir $p = c$, also dass sich die Firmen bei unendlich großer Konkurrenz - dem Traum eines jeden Verfechters der freien Marktwirtschaft - gerade eben über Wasser halten können, ohne Gewinn zu machen, und das auch nur, wenn sie optimal vorgehen.

Obwohl wir in unserer Berechnung sehr viele Vereinfachungen und Idealisierungen vorgenommen haben, so wird sie doch zumindest in ihren Grundzügen von der Praxis bestätigt, wenigstens, was den Zusammenhang Anbieterzahl - Preis betrifft.[3]

[3] vgl. Reichel-Müller-Hanisch: "Lehrbuch der Mathematik", Band 8, S.217ff

Kapitel 6

Wie kann man strategisch wählen?

Bei einer Wahl trifft man üblicherweise jene Entscheidung, die einem am meisten zusagt. Das ist auch gut und richtig so, sofern alles in einem Wahlgang entschieden wird. Läuft das Wahlsystem jedoch anders, dann sind gewisse Maßnahmen möglich, um trickreich seinen Kopf durchzusetzen:

Vorstandssitzung des überaus exklusiven "Klubs der toten Mathematiker". Die drei Vorstandsmitglieder Boris, Doris und Maurice beraten, ob neue Mitglieder aufgenommen werden sollen. Sie sind sich darüber einig, dass von den beiden Bewerbern, Alice und Bob, höchstens einer neues Mitglied werden soll. Also stimmen sie ab, ob Alice, Bob oder keiner von beiden genommen werden soll. Unglücklicherweise stimmt jeder der 3 für etwas anderes, weshalb sie ein neues Wahlsystem vereinbaren: Zuerst fällt die Wahl zwischen Alice und Bob. Im zweiten Wahlgang soll dann festgestellt werden, ob der betreffende Kandidat oder doch lieber gar keiner aufgenommen wird. Abbildung 6.1 zeigt den Spielgraphen zu dieser Wahl.

Nun haben die drei Vorstandsmitglieder ziemlich unterschiedliche Vorstellungen, was ihnen am besten gefällt, und so überlegt sich jeder eine Reihung:

	Boris	Doris	Maurice
1.	Alice	niemand	Bob
2.	niemand	Alice	Alice
3.	Bob	Bob	niemand

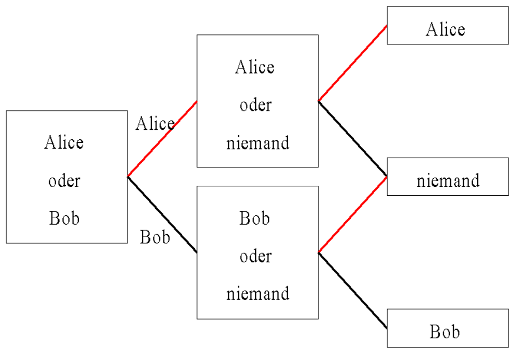


Abbildung 6.1: Mitgliedswahl im Klub der toten Mathematiker

Der erste Gedanke ist, dass wohl Alice gewinnen wird, denn in Summe genießt sie die meisten Sympathien. In Abbildung 6.1, in der die Linien rot eingezeichnet sind, denen die Wahl folgen würde, wenn alle drei nach ihrer Reihung wählen, wird dies auch bestätigt, die roten Linien führen zu Alice. Aber sehen wir uns an, was passiert, wenn Doris versucht, sehr schlau zu sein und ihren Willen durchzusetzen versucht:

Sie wählt zu Beginn Bob, was äußerst überraschend erscheint, denn das ist es ja genau, was sie am wenigsten will! Doch im zweiten Wahlgang kann sie mit Boris zusammen eine Mehrheit bilden, die dafür stimmt, dass niemand aufgenommen wird, und so hat Doris auf schlauem Wege das erreicht, was sie wollte.

Pech für die arme Alice? Mitnichten, denn nun schaltet sich auch Maurice in die strategische Wahl ein, indem er im ersten Wahlgang für Alice stimmt. Er kann sich hierbei etwa überlegen, dass er nie Bob durchsetzen wird können, weil Boris und Doris strikt dagegen sind. Deshalb wählt er von zwei Übeln das kleinere und kann im zweiten Wahlgang zusammen mit Boris durchsetzen, dass Alice doch noch aufgenommen wird.

Damit ist auch quasi ein endgültiger Zustand erreicht, denn Boris hat erreicht, was er wollte, Maurice hat das beste erreicht, was er konnte,und zusammen sind sie stärker als Doris. Strategisches Wählen führt hier also im Endeffekt dennoch zum erwarteten Ergebnis.

Kapitel 7

Lotterien und Nutzensfunktionen

Wie bereits in Kapitel 5 erwähnt, gibt es in der ökonomischen Spieltheorie mehr Gewinnwerte als bloß 0 und 1, ja im Wesentlichen gibt es unendlich viele. Das ist auch nur zu logisch, denn stellt man sich etwa einen Spekulanten an der Börse vor, so kann der 1 Million Gewinn machen, aber auch 1,5 Millionen, 2 Millionen,... Oder er kann auch Verlust machen. In jedem Fall strebt er danach, seinen Gewinnwert (der auch negativ sein kann) möglichst groß zu halten. Zusätzlich tritt ein weiterer Faktor ins Spiel: Glück. Man mag es Glück nennen, Zufall, wie auch immer, der Mathematiker kennt das alles nicht, er rechnet allenfalls mit Wahrscheinlichkeiten. Auch das ist sehr lebensnahe, denn der genannte Spekulant muss ja oft ein gewisses Risiko eingehen (auch wenn es sich um exakt kalkuliertes Risiko handelt), bei dem er mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit hohen Gewinn machen kann, aber mit einer anderen Wahrscheinlichkeit vielleicht sogar hohe Verluste. Um all dies unter einen Hut zu bringen, hat der Mathematiker ein Mittel, um eine sogenannte "Lotterie", die ein Spieler eingehen kann, zu beschreiben:

Satz 6 *Seien $E_1, E_2, \ldots E_n$ die verschiedenen Ergebnisse einer Lotterie, die einen Gewinn von $G_1, G_2, \ldots G_n$ mit der Wahrscheinlichkeit von $p_1, p_2, \ldots p_n$ einbringen, wobei $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ ist, so ist der Wert dieser Lotterie gleich $\sum_{i=1}^{n} p_i G_i$. Dieser Wert ist der zu erwartende Gewinn aus dieser Lotterie. Erachtet man den Gewinn als eine Zufallsvariable, so ist dieser Wert gerade der Erwartungswert der Zufallsvariablen.*

Ein simples Beispiel, um diese Vorgehensweise zu demonstrieren:

Im Casino hat ein Spieler die Möglichkeit, am Roulettetisch auf eine Zahl - sagen wir, 7 - zu setzen (andere Möglichkeiten werden einstweilen außer Acht gelassen) oder dies zu unterlassen. Im letzteren Fall beträgt sein zu erwartender Gewinn einfach 0. Und was geschieht im anderen Fall?

Am Roulettetisch gibt es 36 Zahlen und die Null. Unter diesen 37 Ereignissen gibt es genau ein günstiges für den Spieler, das ihm 36fachen Einsatz E einbringt, also einen Gewinn von $36E - E = 35E$. Bei allen anderen Möglichkeiten macht er einen Verlust von E, was wir als Gewinn von -E definieren. Der Wert dieser Lotterie ist nun:

$$\frac{35E}{37} + \frac{-36E}{37} = \frac{-E}{37}$$

Da dieser Wert negativ ist, ergibt sich als einzig richtige Strategie für den Spieler, am Tisch vorbeizugehen, ein Ergebnis, das ohnehin jedem bekannt ist, schließlich wollen die Casinobetreiber ja beim Roulette etwas verdienen.

Gegen dieses ernüchternde Ergebnis hilft nicht einmal das "perfekte" Roulettesystem, mit dem ich schon mehrfach konfrontiert wurde. Beim ersten Durchdenken scheint es auch tatsächlich so, als ob man immer gewänne:

> Man setzt z.B. als erstes eine Einheit (am besten die hauseigene Untergrenze des Casinos) auf Rot. Gewinnt man, ist es gut so. Wenn nicht, so verdoppelt man den Einsatz. Dieses Einsatzverdoppeln führt man solange durch, bis einmal die Farbe Rot erscheint - irgendwann muss es ja soweit sein. Man ersieht, dass dabei am Ende stets eine Einheit gewonnen wird.

Genial, oder? Da mag es doch verwundern, dass es noch Nicht-Millionäre gibt. Aber der Plan hat einen Haken. Bestimmen wir nämlich einmal den Gewinnwert:

Wir können wohl guten Gewissens davon ausgehen, dass das zu Beginn vorhandene Vermögen endlich ist (wieso sollte auch jemand mit unendlichem Vermögen danach trachten, dieses durch Roulettespielen zu vermehren?). Also kann es nur für eine begrenzte Anzahl von Fehlversuchen ausreichen. Sagen wir, es sei genug Geld vorhanden, um n Runden mit Einsatzverdoppeln zu "überstehen". Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Runde nicht Rot kommt, ist $\frac{19}{37}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass in n aufeinanderfolgenden Runden nicht Rot erscheint, $\left(\frac{19}{37}\right)^n$. Wenn dies der Fall ist, verliert man $1 + 2 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$ Einheiten. Andernfalls gewinnt man eine Einheit.

Der Gewinnwert ist also:

$$\begin{aligned} G &= \left(1-\left(\frac{19}{37}\right)^n\right)E-\left(\frac{19}{37}\right)^n(2^n-1)E \\ &= E-\left(\frac{19}{37}\right)^n 2^nE \\ &= E-\left(\frac{38}{37}\right)^n E \\ &= E\left(1-\left(\frac{38}{37}\right)^n\right)<0 \end{aligned}$$

Der Gewinnwert bleibt weiter negativ, unser trickreiches Vorgehen hat nicht viel genützt. Das Problem ist: Man gewinnt zwar mit einer hohen Wahrscheinlichkeit, doch nur unverhältnismäßig wenig im Vergleich zu dem, was man - mit geringer Wahrscheinlichkeit - verlieren könnte. Will man etwa 10 Euro mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% gewinnen, so muss man immerhin 150 Euro dafür aufwenden und damit auch riskieren. Soll die Wahrscheinlichkeit gar 99,9% betragen, müssten es bereits 20470 Euro sein - ziemlich viel, bedenkt man den kleinen Gewinn!

So widerlegt der Gewinnwert also eine Idee, die vorerst überaus logisch erscheint. Der Mathematiker empfiehlt also, Experimente am Roulettetisch zu unterlassen!

Nun jedoch zurück zur Theorie: für den Fall, dass der Gewinn aus einer Lotterie eine stetig verteilte Zufallsvariable ist (gemäß einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion f(x)), ist der Gewinnwert, der ja identisch zum sogenannten Erwartungswert E(x) ist, durch folgende Formel gegeben:[1]

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

Der zu erwartende Gewinnwert zeigt zwar an, was ein Spieler bei wiederholter Anwendung im Durchschnitt gewinnen sollte (jedenfalls, wenn die Anzahl der Wiederholungen gegen unendlich strebt), er allein macht aber auch noch nicht glücklich, denn er ist nicht das einzige Kriterium dafür, wie eine Person im Falle einer solchen Lotterie handelt. Eine Lotterie stellt kein exaktes Äquivalent zu ihrem Wert dar, dazu müsste man nämlich annehmen, dass der Spieler risikoneutral ist. Was dies nun genau zu bedeuten hat, dem soll nun nachgegangen werden.

[1] Siehe z.B. Reichel-Müller-Hanisch: "Lehrbuch der Mathematik", Band 8, S.107ff

Mut zum Risiko und Scheu vor dem Glücksspiel - die Nutzensfunktion:

Was würden Sie tun, wenn man ihnen folgendes anbietet:

> Ich lasse Ihnen die Wahl - entweder ich gebe Ihnen 5 Millionen bar auf die Hand oder ich werfe eine Münze. Bei "Kopf" bekommen Sie 10 Millionen, bei "Zahl" gar nichts.

Nun, der Gewinnwert ist in beiden Fällen genau 5 Millionen. Die Wahl fällt also schwer. Eine Person, die eher vorsichtig agiert, wird wohl den Spatz in der Hand nehmen und sich mit 5 Millionen "begnügen". Jemand, der das Risiko nicht scheut, wird es wohl "darauf ankommen lassen". Man sagt, dass ersterer risikoabweisend ist, der andere risikoliebend.

Erhöhen wir nun den Betrag, der bei "Kopf" ausgezahlt wird, auf 15 Millionen. Nun steigt der Wert der Lotterie auf 7,5 Millionen, dennoch wird eine weniger mutige Person weiterhin die 5 Millionen nehmen. Wie lässt sich solches Verhalten mathematisch beschreiben?

Von Neumann und *Morgenstern* haben dazu die Nutzensfunktion eingeführt, die dazu dient, solches Verhalten zu begründen:

Sei $f(x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^+$ ist dabei die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen!) eine beliebige monoton steigende, stetige Funktion. $f(x)$ stellt den "Nutzen" dar, den eine gewisse Person in einer Menge Geldes x sieht.

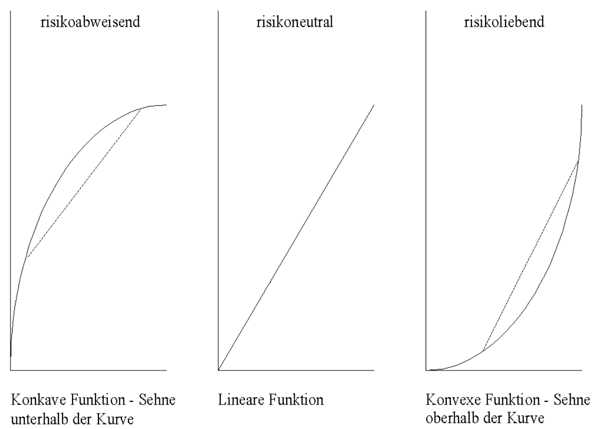


Abbildung 7.1: verschiedene Nutzensfunktionen

Ist die Funktion f(x) nun konkav, negativ gekrümmt (2.Ableitung negativ[2]), dann handelt es sich um eine risikoabweisende Person, ist sie konvex, positiv gekrümmt (2.Ableitung positiv), um eine risikoliebende. Im Falle einer linearen Funktion ist die Person risikoneutral. Wieso zwischen dem Nutzen, der im Geld gesehen wird, und der Risikobereitschaft ein Zusammenhang besteht, zeigt zunächst das Beispiel, ein Beweis folgt:

Es habe eine Person, der das Obige angeboten wird, die Nutzensfunktion $f(x) = \sqrt{x}$. Dabei handelt es sich um eine konkave Funktion, also ist sie risikoabweisend. Ihr Nutzen beträgt im ersten Fall:

- 5 Millionen direkt: Nutzen $= f(5) = \sqrt{5} = 2,236\ldots$
- Lotterie zwischen 0 und 10 Millionen: Nutzen $= \frac{f(0)}{2} + \frac{f(10)}{2} = \frac{0+\sqrt{10}}{2} = 1,581\ldots$

Also nimmt diese Person lieber die 5 Millionen. Sehen wir nun, was geschieht, wenn das zweite Angebot erhöht wird:

- 5 Millionen direkt: Nutzen $= f(5) = \sqrt{5} = 2,236\ldots$
- Lotterie zwischen 0 und 15 Millionen: Nutzen $= \frac{f(0)}{2} + \frac{f(15)}{2} = \frac{0+\sqrt{15}}{2} = 1,936\ldots$

Noch immer bevorzugt diese Person das erstere Angebot, da es den größeren Nutzen aufzuweisen hat.

Eine andere Person hat dagegen die konvexe Nutzensfunktion $f(x) = x^2$. Rechnen wir für ihn den Nutzen in der ersten Variante aus:

- 5 Millionen direkt: Nutzen $= f(5) = 5^2 = 25$
- Lotterie zwischen 0 und 10 Millionen: Nutzen $= \frac{f(0)}{2} + \frac{f(10)}{2} = \frac{0+10^2}{2} = 50$

Der Nutzen ist für diese Person also bei der Lotterie deutlich höher, und somit wählt sie die riskantere Variante. Klarerweise ist bei Erhöhung auf 15 Millionen der Nutzen noch höher.

Man soll sich auch nicht durch die deutlich verschieden großen Nutzenswerte täuschen lassen, Wichtig sind nämlich nicht die Werte an sich, sondern ihr Verhältnis zueinander. Tatsächlich kann man die Nutzensfunktion mit einem

[2] Siehe z.B. Reichel-Müller-Hanisch-Laub: "Lehrbuch der Mathematik", Band 7, S.89ff

beliebigen konstanten positiven Faktor multiplizieren, ohne dass sich am Verhalten der Person etwas ändert.

Eins bin ich noch schuldig geblieben, nämlich den Beweis dafür, dass Personen mit einer konvexen Nutzensfunktion das Risiko lieben und solche mit einer konkaven Nutzensfunktion nicht:

Beweis für den Zusammenhang von Nutzensfunktion und Risikofreude:

Gegeben sei wieder eine Lotterie, die Gewinne von $G_1, G_2, \ldots G_n$ mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_1, p_2, \ldots p_n$ verspricht, wobei $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ ist. Ihr Wert ist nach Satz 2.2. gleich $\sum_{i=1}^n p_i G_i$. Bietet man nun einer Person mit der Nutzensfunktion f(x) die Wahl zwischen dem direkt ausgezahlten Wert $\sum_{i=1}^n p_i G_i$ und der Lotterie, so ist der Nutzen für ersteren $f(\sum_{i=1}^n p_i G_i)$, für die Lotterie hingegen $\sum_{i=1}^n p_i f(G_i)$. Nun gilt nach der Jensen-Ungleichung:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(G_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i G_i\right), \text{ falls f(x) konkav ist}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(G_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i G_i\right), \text{ falls f(x) konvex ist}$$

Gleichheit gilt in beiden Fällen genau dann, wenn $G_1 = G_2 = \ldots = G_n$ ist, also wenn die Lotterie nur eine Auszahlungsmöglichkeit hat. Dann ist jedoch gar kein Unterschied zwischen Lotterie und Auszahlung ihres Wertes vorhanden! Sollte es also zur Wahl zwischen einer Lotterie und der direkten Auszahlung ihres Wertes kommen, dann wählt derjenige mit einer konkaven Nutzensfunktion die direkte Auszahlung, derjenige mit einer konvexen die Lotterie, womit der Zusammenhang von Nutzensfunktion und Risikobereitschaft gezeigt ist.

In der Spieltheorie gilt der perfekt rationale Spieler als risikoneutral, in der Praxis sind die meisten Menschen risikoabweisend, wobei es freilich auch hier Ausnahmen gibt.

Ein paradoxes Beispiel, das nur durch die Anwendung solcher Risikofunktionen einigermaßen behandelbar wird, folgt noch in Teil III.

In diesem Kapitel ging es nur um Überlegungen, die der einzelne anstellt. Dennoch sind sie für die Spieltheorie, in der es um Spiele mit Beteiligung mehrerer Personen geht, von Bedeutung, denn wie im nächsten Kapitel geht es dabei zumeist um Gewinnwerte, die in vielen Situationen erst eingeschätzt werden müssen, bevor man sich auf die Suche nach optimalen Strategien begibt.

Kapitel 8

Das Bimatrixspiel – dominante Strategien – das Nash-Gleichgewicht

8.1 Das Bimatrixspiel

Nun wollen wir wiederum mehrere Spieler gegeneinander antreten lassen, im ersten Beispiel erst einmal nur zwei an der Zahl. Wir nehmen zwei Spekulanten auf dem Aktienmarkt an, nennen wir sie Stein und Reich, die gleichzeitig ihre Entscheidungen treffen müssen, und deren Entscheidungen einen simultanen Effekt auf beider Gewinne haben. Sie können beide entweder Aktien kaufen oder verkaufen, und das hat für sie jeweils - erwartungsweise! - folgende unterschiedliche Auswirkungen:

- Wenn beide kaufen, gewinnen beide 4 Millionen $.
- Wenn Stein kauft und Reich verkauft, erzielt Stein einen Gewinn von 3 Millionen und Reich einen Gewinn von 1 Million.
- Wenn umgekehrt Stein verkauft und Reich kauft, macht Stein 1 Million Gewinn und Reich 3 Millionen.
- Wenn allerdings beide verkaufen, gewinnt keiner von beiden etwas.

Beide Spieler sind indifferent darüber, welchen Gewinn der jeweils andere erzielt, sie streben nur nach der Maximierung ihres eigenen Gewinns.

Mathematiker wollen - wie immer - solcherlei Probleme in eine adäquate Form bringen, in diesem Fall nämlich in die einer Matrix. Matrizen sind rechteckige Zahlenschemata, und in diesem Fall deuten die Zeilen und Spalten die einzelnen Möglichkeiten für die beiden Spieler an. In den Feldern stehen dann die zugehörigen Gewinnwerte für die beiden Spieler. Man bezeichnet eine solche Matrix auch als Gewinnmatrix oder auch Bimatrix.

		Reich	
		kaufen	verkaufen
Stein	kaufen	4 4	1 3
	verkaufen	3 1	0 0

Abbildung 8.1: Gewinnmatrix

Was sollen die beiden tun? In diesem Fall haben wir es mit einem besonders schönen Beispiel zu tun, denn es existiert etwas, was man als Gleichgewicht dominanter Strategien bezeichnet. Um diesen Begriff zu erläutern, muss erst definiert werden, was eine dominante Strategie ist:

> Eine Strategie heißt schwach dominant, wenn sie unabhängig von der Strategie des Gegners besseren oder zumindest gleich guten Gewinn beschert als jede andere Strategie. Ist der Gewinn sogar immer größer und nicht nur gleich, so spricht man von einer stark dominanten Strategie. Hat man eine dominante Strategie (stark oder schwach), so sollte man sie stets spielen.

Hier haben gleich beide Spieler, Stein und Reich, eine stark dominante Strategie, nämlich, zu kaufen. Egal, ob der Gegner kauft oder verkauft, sie erzielen damit mehr Gewinn als mit Verkauf, und zwar jeweils 3 Millionen mehr. Klarerweise werden nun beide ihre dominante Strategie wählen und kaufen. Sie erzielen damit auch beide ihr Maximum an Gewinn. Keiner von beiden hat Grund, von dieser Strategie abzuweichen, es hat sich ein Gleichgewicht ergeben. Da beide ihre dominante Strategie spielen, spricht man vom oben erwähnten Gleichgewicht dominanter Strategien.

Nun ist es ein ziemlich seltener Zufall, wenn es ein Gleichgewicht dominanter

Strategien gibt, um genau zu sein, tritt er fast nie auf, bei Nullsummenspielen etwa überhaupt nicht. Angenehm bleibt die Analyse noch, wenn einer der Spieler über eine dominante Strategie verfügt, wie dies im folgenden Beispiel der Fall ist:

Wieder befinden sich Stein und Reich im gegenseitigen Börsenwettstreit, doch diesmal sieht die Gewinnmatrix etwas anders aus (Abb. 8.2a): Eine kleine

a)

		Reich	
		kaufen	verkaufen
Stein	kaufen	4 4	1 3
	verkaufen	3 1	0 5

b)

		Reich	
		kaufen	verkaufen
Stein	kaufen	1 3	0 0
	verkaufen	-2 -2	3 1

Abbildung 8.2: Zwei weitere Gewinnmatrizen

Änderung der Matrix von Abbildung 8.1 hat bewirkt, dass nun Stein nicht mehr über eine dominante Strategie verfügt, Reich aber noch immer. Klarerweise wird sich Reich diese dominante Strategie zunutze machen, und damit kann Stein rechnen, das ist der springende Punkt! Stein wird, da er fix damit rechnen kann, dass Reich seine dominante Strategie spielt, kaufen, denn dann macht er den besseren Gewinn, auch wenn das Strategiepaar (verkaufen, verkaufen) für ihn günstiger wäre, doch er kann sich ja sicher sein, dass Reich rational agiert - jedenfalls nach der klassischen Annahme der Spieltheorie. Wieder ergibt sich ein Gleichgewicht, jedoch kein Gleichgewicht dominanter Strategien. Ein solches Gleichgewicht wird ein Nash-Gleichgewicht genannt (nach *John Nash*, einem der größten ökonomischen Spieltheoretiker überhaupt). Worum es sich dabei genau handelt, soll im nächsten Kapitel behandelt werden, zuvor möchte ich aber noch in einem kleinen Exkurs eine Frage behandeln:

Was ist, wenn den beiden die Gewinne des anderen nicht egal sind?

Dabei soll es nicht solcherart gemeint sein, dass die beiden Sadisten sind, denen der Ärger des jeweils anderen Freude macht, auch wenn sie selber Verluste dafür in Kauf nehmen mussten. Vielmehr können auch dahinter ökonomische Interessen stecken: wie wir in Kapitel 5 bereits gesehen haben, ist es ein Vorteil für eine Firma, wenn sie möglichst allein am Markt ist. Es kann also durchaus in ihrem Interesse liegen, wenn andere Firmen Verluste machen und sich deshalb womöglich aus dem Markt zurückziehen müssen.

Es sei nun so, dass ein Spieler dem eigenen Gewinn den Wert 1 beimisst und dem Verlust des Gegners einen Wert λ . Den Fall $\lambda = 0$ haben wir soeben behandelt, wenn der Spieler christliche Nächstenliebe zeigt, kann $\lambda < 0$ sein, im Normalfall liegt λ zwischen 0 und 1, extrem gehässige Spieler haben ein $\lambda > 1$. Es besteht nun die Frage, ob wir dieser Situation mit einer Gewinnmatrix beikommen können. Die Antwort ist selbstverständlich ja, und dies lässt sich mathematisch leicht machen. Es seien die Werte, die die beiden Spieler dem Verlust des Gegners beimessen, λ bzw. μ. Dann formt sich die Gewinnmatrix um, wie in Abbildung 8.3 gezeigt.

Es spielt also im Wesentlichen bei der Betrachtung von Gewinnmatrizen keine Rolle, ob die Spieler nicht nur auf ihren eigenen Gewinn achten, sondern auch auf den ihres Gegners, denn dadurch ändern sich nur die Werte der Matrix, wir müssen keine neue Darstellungsform wählen. Da es uns nicht darum geht, eine bestimmte Aufgabe zu lösen, sondern eine allgemeine Bearbeitungsmethode für Gewinnmatrizen zu finden, können wir im Folgenden ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\lambda = \mu = 0$ ist.

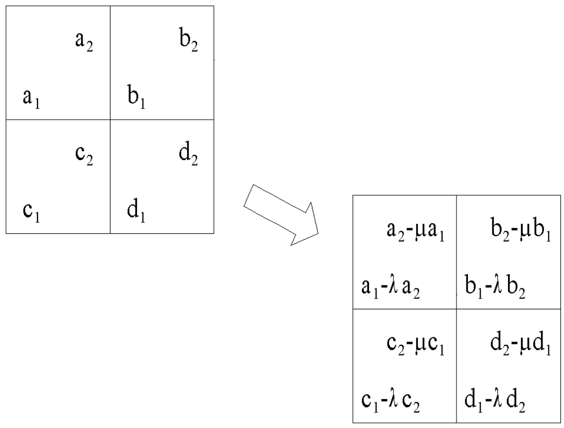


Abbildung 8.3: Wie sich die Gewinnmatrix ändert

8.2 Das Nash-Gleichgewicht und das Nash'sche Theorem

Kehren wir kurz zurück zur Abbildung 8.2. Die Matrix b) ist bis jetzt noch unbesprochen geblieben, und sie scheint uns auch einige Schwierigkeiten zu bereiten. Nicht so sehr stört uns, dass negative Gewinne (also Verluste) auftreten, vielmehr stellt es für unsere bisher verwendeten Methoden ein Problem dar, dass beide Spieler keine dominante Strategie aufweisen können. Was kann ein Spieltheoretiker nun ausrichten? *John Nash* hat dafür das Nash-Gleichgewicht[1] definiert:

> Ein Nash-Gleichgewicht ist dann gegeben, wenn kein Spieler einen Grund hat, seine Strategie alleine zu wechseln.

Was heißt das nun im Klartext? Im Gegensatz zum Gleichgewicht dominanter Strategien muss die Strategie, die ein Spieler verfolgt, nicht für alle Antworten des Gegners optimal sein, sondern nur für die eine, die der Gegner im Zuge des Gleichgewichtszustands verwendet. Wenn dies für beide gilt, dann würde keiner der Spieler seine Strategie wechseln, denn dies würde ihm sicher keine Verbesserung bringen, womit ein Gleichgewichtszustand erreicht

[1]Der Begriff "Gleichgewicht" ist vielleicht etwas irreführend, hat sich jedoch so eingebürgert. Man denkt hierbei vielleicht, dass beide Spieler gleichen Vorteil haben, was absolut nicht der Fall sein muss. Das "Gleichgewicht" ist in realen Situationen natürlich abhängig von der Macht und Stärke der Spieler. Was sich tatsächlich einstellt, ist eine Art "Kräftegleichgewicht": keiner kann aus eigener Kraft seine Situation verbessern.

ist. Jedes Gleichgewicht dominanter Strategien ist ein Nash-Gleichgewicht, aber nicht umgekehrt. Es kann dabei durchaus vorkommen, dass beide Spieler einen Vorteil hätten, wenn sie gemeinsam wechseln (ein Beispiel dazu folgt), aber keiner kann für sich ohne Mithilfe des anderen einen weiteren Vorteil erzielen. Die beiden Spieler treffen ihre Entscheidungen aber separat (außer, es würde sich um ein kooperatives Spiel handeln, was noch viel komplizierter ist und hier auch nicht behandelt wird), und somit haben im Zuge des Nash-Gleichgewichts beide Spieler eine perfekt rationale Strategie. Matrix 8.2a hat genau das eine Nash-Gleichgewicht (kaufen, kaufen), Matrix 8.2b hat sogar 2 verschiedene Nash-Gleichgewichte, nämlich (kaufen, kaufen) und (verkaufen, verkaufen) (und noch ein weiteres, wenn man sogenannte gemischte Strategien betrachtet: dabei wählt Stein mit Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{6}$ "kaufen", Reich mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$; die Betrachtung solcher Strategien würde hier aber zu weit führen).

John Nash hat darüber hinaus auch das Nash'sche Theorem bewiesen, demzufolge jedes Bimatrixspiel zumindest ein Nash-Gleichgewicht hat (Dabei können aber auch gemischte Strategien wie oben vorkommen, d.h., man wählt nicht immer dieselbe, sondern verschiedene Optionen, aber mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten). Somit kann man für jede wie immer geartete Matrix zumindest ein Paar von Strategien finden, das einen Gleichgewichtszustand ergibt. Aus spieltheoretischer Sicht sind diese dann auch immer perfekt rational, wenn sie auch nicht immer wirklich vernünftig sein müssen - wie folgendes, nur allzu realitätsnahes Beispiel zeigt:

		Eurasien	
		aufrüsten	abrüsten
Ozeanien	aufrüsten	-1 / -1	-2 / 2
	abrüsten	2 / -2	1 / 1

Abbildung 8.4: Das Dilemma des Wettrüstens

Atomare Aufrüstung

Es seien auf der Welt 2 Großmächte - ich möchte sie in Anlehnung an George Orwells Meisterwerk "1984" Ozeanien und Eurasien nennen - die beide vor der Wahl stehen, ihre Atommacht auf- oder abzurüsten. Wenn eine Macht allein aufrüstet, kann sie den Krieg gewinnen. Wenn beide aufrüsten, gibt es zwar viele Opfer, aber keinen Sieger. Einzig wenn sich beide friedlich verhalten, können sie beide einen gewissen Gewinn verzeichnen, denn wenigstens sind sie beide verschont geblieben. Welche Strategie sollen nun der große Bruder und sein Eurasischer Kollege aus spieltheoretischer Sicht am besten wählen? Die Gewinnmatrix sieht so aus, wie es Abbildung 8.4 zeigt, in Einheiten von z.B. 10 Millionen Menschenleben. Wie eine kurze Analyse zu Tage bringt, ist das einzige Nash-Gleichgewicht (aufrüsten, aufrüsten), und damit theoretisch optimal. Vernünftig ist dies aber ganz und gar nicht, denn in Summe bringt dies den beiden Mächten maximalen Verlust! Für beide besser (in der Fachsprache der Spieltheorie "Pareto-effizient") wäre (abrüsten, abrüsten). Nicht immer müssen rationale Strategien wirklich vernünftig sein. Leider wurde und wird aber diese Strategie auch in der Wirklichkeit praktiziert.

Wie findet man allgemein Nash-Gleichgewichte?

Hat man es nur mit einfachen 2×2-Matrizen zu tun, so macht es noch keine großen Schwierigkeiten, ein Nash-Gleichgewicht (für reine Strategien) durch Probieren aufzufinden, da es nur 4 Möglichkeiten gibt. Wenn jedoch die Spieler mehr Optionen haben, so würde ein derartiges Vorgehen relativ viele Rechenschritte benötigen, geht man von einer algorithmischen Behandlung - etwa durch einen Computer - aus.

Es gibt jedoch einen besseren Algorithmus zum allgemeinen Auffinden von Nash-Gleichgewichten (sofern es welche mit reinen Strategien gibt): Für jede Strategie des einen Spielers sucht man die besten Strategien des Gegners, d.h. alle solchen, die maximalen Gewinn erzielen. Dies kann natürlich auch nur eine einzelne sein. Alle zugehörigen Felder markiert man, z.B. mit einer Farbe. Nun führt man dasselbe analog für den anderen Spieler aus und markiert wieder, eventuell in einer anderen Farbe. Alle Felder der Matrix, die nun doppelt markiert sind, stellen Nash-Gleichgewichte dar. Dieser Algorithmus ist deutlich ökonomischer, wenn man Nash-Gleichgewichte bestimmen will.

Als Beispiel soll die folgende Matrix (Abb. 8.5) dienen, bei der die Gewinnwerte zufällig gewählt wurden. Die Spieler haben 4 bzw. 6 verschiedene

Strategien zur Verfügung. Die jeweils besten Strategien wurden in Blau und Rot gefärbt, die beiden Nash-Gleichgewichte, die sich ergeben, sind dick umrahmt.

3 1	2 0	-1 4	-2 0	1 1	5 -3
2 2	3 2	3 0	-1 0	3 -2	-3 0
1 1	-2 2	1 4	-1 1	0 -2	3 0
2 2	-2 -2	1 0	2 -1	1 5	-2 2

Abbildung 8.5: Nash-Gleichgewichte einer größeren Matrix

Matrizen höherer Dimension:

Bis jetzt haben wir nur Bimatrizen betrachtet, doch in der Praxis treten häufig mehr als zwei Spieler gegeneinander an, etwa beim eingangs betrachteten “Börsenspiel”. Auch dafür gibt es die Darstellungsform als Matrix, die dann in einer entsprechender Dimension ausfallen müssen. So wird etwa ein Spiel mit 3 Teilnehmern als Matrix in Form eines Quaders dargestellt, für 4 Personen benötigt man schon das 4-dimensionale Analogon, etc. Auch dafür gibt es Nash-Gleichgewichte, aber die Behandlung höherdimensionaler Matrizen erweist sich bald als ausgesprochen unangenehm. Außerdem ist noch nicht endgültig alles über 2-dimensionale Matrizen mit dem Nash-Gleichgewicht abgetan (wie zum Beispiel das Dilemma des Wettrüstens zeigt). Solange nicht einmal alle Fragen zur diesen Spielen geklärt worden sind, ist eine Betrachtung höherer Dimensionen natürlich doppelt schwierig. Die Spieltheorie ist als sehr junge mathematische Disziplin eben noch nicht so weit fortgeschritten.

Teil III

Weitere (Bei-)Spiele

Kapitel 9

Angaben zu den Beispielen

Beispiel 1 ("Hex") Gegeben ist ein Feld aus n^2 regelmäßigen Sechsecken, die wie in der Abbildung in einem Rhombus angeordnet sind. Abwechselnd färben Links und Rechts je ein Feld blau bzw. rot. Links gewinnt, wenn die blauen Felder eine durchgehende Verbindung des oberen und unteren Randes bilden, Rechts, wenn die roten Felder den linken und rechten Rand verbinden. Wer hat eine Gewinnstrategie? Kann es auch unentschieden ausgehen?

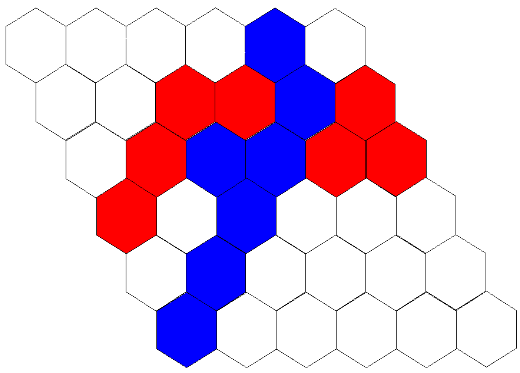


Abbildung 9.1: Das Spielfeld für Hex

Beispiel 2 ("Wythoffs Spiel") Eine Dame steht auf einem beliebigen Feld auf einem nach rechts und unten hin unendlichen Schachbrett. Abwechselnd dürfen Links und Rechts die Dame nach links, oben oder links oben ziehen, den normalen Zugmöglichkeiten der Dame folgend. Es gewinnt, wer die Dame in die linke obere Ecke zieht.

Beispiel 3 Wie beim Nim dreht sich alles um Haufen von Steinen. Diesmal dürfen jedoch nur 2, 3 oder 5 Steine von einem Haufen genommen werden. Dieses Spiel ist mit Hilfe von Nim-Zahlen zu analysieren. Welche Nim-Zahl trägt der Haufen mit 2000 Steinen?

Beispiel 4 ("Polyamond - Spiel") Es wurde bereits in Kapitel 3.4 genannt. Für welche Polyamonds kann Links gewinnen?

Beispiel 5 In die Felder eines 5×5-Felder schreiben Links und Rechts abwechselnd 1 bzw. 0. Am Ende wird für jedes 3×3-Unterfeld die Anzahl der 1-er bestimmt. Es sei M das Maximum all dieser Zahlen. Wie hoch kann Links M maximal machen, unabhängig von der Spielweise des Gegners? (Vorschlag für die 35. Internationale Mathematik-Olympiade 1994)

Beispiel 6 Zwei Spieler A und B spielen folgendes Spiel. Auf einem Kreis sind eine gerade Anzahl von Feldern angeordnet. A beginnt. A und B spielen abwechselnd, wobei sie in jedem Zug ein freies Feld auswählen und dort entweder O oder M hineinschreiben. Wer zuerst erreicht, dass OMO (Anm.: ÖMO ist die Abkürzung für Österreichische Mathematikolympiade, OMO ist einfach ÖMO ohne Umlaut) in 3 nebeneinanderliegenden Feldern zu lesen ist, hat gewonnen. Sind alle Felder beschrieben, ohne dass OMO zu lesen ist, endet das Spiel unentschieden. Man zeige, dass der beginnende Spieler A nicht gewinnen kann. (Bsp. 6 des Bundeswettbewerbs der 30. Österreichischen Mathematikolympiade 1999)

Beispiel 7 Links und Rechts nehmen abwechselnd eine Zahl aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 9\}$. Es gewinnt, wer mit 3 seiner Zahlen als Summe 15 erreicht. Man zeige, dass dieses Spiel bei bester Spielweise stets unentschieden endet.

Beispiel 8 Auf einem Tisch befinden sich n ($n \geq 1$) Kugeln. Zwei Spieler nehmen abwechselnd Kugeln vom Tisch, und zwar jeweils wenigstens eine und höchstens halb so viele Kugeln wie noch vorhanden sind. Verloren hat jener Spieler, der nicht mehr ziehen kann. Man bestimme alle Werte von n, für die der Spieleröffner eine sichere Strategie hat, das Spiel zu gewinnen. (Vorbereitungskurs zur Österreichischen Mathematikolympiade, Raach 1999)

Beispiel 9 ("Teile und herrsche"[1]) In zwei Schachteln befinden sich jeweils eine gewisse Anzahl Steine, etwa 1999 und 2000. Bei jedem Zug wirft ein Spieler den Inhalt einer Schachtel weg und teilt den Inhalt der anderen Schachtel auf die beiden auf. Es verliert, wer keinen Zug mehr machen kann.

[1] Lateinisch "divide et impera", Wahlspruch des französischen Königs Ludwig XI.

Beispiel 10 ("Würfelpoker ohne Verluste") Links beginnt, indem er einen Spielwürfel auflegt. Es wird mit der Zahl begonnen, die der Würfel zeigt. Nun kippen die beiden den Würfel jeweils um eine Kante und addieren die Zahl, die der Würfel nunmehr zeigt, auf. Es verliert, wer auf eine Zahl erhöhen muss, die größer als 30 (oder sonst eine vereinbarte Zahl) ist. Man finde eine Gewinnstrategie.

Beispiel 11 Alice und Bob haben ein rechteckiges Stück Schokolade. Die Spielregeln sind dieselben wie in dem Spiel aus Kapitel 4.1, es verliert, wer das schimmlige Stück in der linken oberen Ecke essen muss. Es werden aber nicht Rippen abgebrochen, sondern "Ecken". Das heißt, dass die Spieler abwechselnd ein Stück wählen und dieses zusammen mit allen, die sich rechts oder darunter befinden, aufessen müssen.

Beispiel 12 Links und Rechts setzen abwechselnd auf ein 9×9 Feld ein Kreuz bzw. einen Kreis. Wenn alle Felder besetzt sind, wird die Anzahl A aller Zeilen und Spalten bestimmt, die mehr Kreuze enthalten, sowie die Anzahl B aller Zeilen und Spalten, mit denen es sich umgekehrt verhält. Die Differenz $D = A - B$ ist der Gewinnwert für Links. Bestimme den Wert von D, der sich bei bester Spielweise ergibt. (Turnier der Städte, Frühjahr 1999, 1.Runde 7.-8. Klasse)

Beispiel 13 ("Juniper Green") Auf einem Tisch liegen Karten mit den Zahlen $1, 2, \ldots n$ ($n \in \mathbb{N}$). Alice beginnt, indem sie eine beliebige Karte entfernt. Von da an müssen die Spieler stets eine Karte nehmen, die einen Teiler oder ein Vielfaches der vorigen Zahl darstellt. Wer nicht mehr ziehen kann, verliert. Da Alice durch Wegnahme zweier großer Primzahlen zu Anfang leicht gewinnen könnte, muss sie zu Beginn jedoch eine gerade Zahl wählen. Für welche n kann Alice gewinnen?

Beispiel 14 Zwei Eisverkäufer stehen an den Enden eines geradlinigen Strandes, auf dem die Touristen gleichmäßig verteilt sind. Jeder Tourist geht stets zu dem Eisverkäufer, der näher liegt. Wie verhalten sich die Eisverkäufer bei rationalem Vorgehen, um ihren Gewinn zu maximieren?

Beispiel 15 Beliebig viele Personen werden aufgefordert, eine reelle Zahl zwischen 0 und 100 auszuwählen (0 und 100 eingeschlossen). Es gewinnt derjenige einen Preis, der am nächsten an $\frac{2}{3}$ des Durchschnitts aller Zahlen kommt. Wie sollte man rationalerweise vorgehen?

Beispiel 16 ("St. Petersburg-Paradoxon") Im Casino von St.Petersburg, so erzählt die Geschichte, fand einst die folgende Lotterie statt: eine faire Münze wird solange geworfen, bis erstmals “Zahl” erscheint. Wenn dies beim k-ten Mal geschieht, gewinnt jeder Teilnehmer 2^k\$. Wieviel würden Sie zahlen, um an dieser Lotterie teilnehmen zu dürfen?

Beispiel 17 (“Gefangenendilemma”) Bonnie und Clyde werden von der Polizei geschnappt und in separate Zellen geworfen. Sie haben keine Möglichkeit, zu kommunizieren und stehen nun vor der Wahl, ihr Verbrechen zu gestehen oder zu leugnen. Je nach ihrem Verhalten wird der Richter reagieren:

- Leugnen beide, so kann ihnen nur unerlaubter Waffenbesitz nachgewiesen werden, sie werden zu je 2 Monaten Haft verurteilt.
- Leugnet einer, der andere gesteht aber, so wird ersterer zu 5 Monaten verurteilt, der andere kommt mit einer Geldbuße davon.
- Gestehen beide, so werden beide zu 4 Monaten verurteilt.

Wie sollten die beiden handeln? Was geschieht, wenn diese Situation häufiger auftritt? Kann es hier Langzeitstrategien geben, die auf den bisherigen Erfahrungen aufbauen?

Kapitel 10

Lösungen zu den Beispielen

Beispiel 1:

Eine sehr einleuchtende Begründung zeigt, dass es kein Unentschieden geben kann: Stellen wir uns die blauen Felder als Wasser vor und die roten als Land, so muss entweder das Wasser von oben nach unten durchfließen, oder es wird durch einen "Damm" gestoppt, der aber dann ganz von links nach rechts durchgehen muss. Somit erreicht sicher einer der beiden Spieler sein Ziel. Dieser "physikalische" Beweis ist zwar einleuchtend, aber mathematisch nicht gerade exakt formuliert. Es gibt allerdings auch einen mathematischeren Beweis von *David Gale*.

Aufgrund der Theorie, die wir in Kapitel 2 (Satz 2) aufgestellt haben, muss damit Links eine Gewinnmethode haben. Dennoch ist (außer für sehr kleine Felder) nicht bekannt, wie diese Gewinnstrategie dann im Endeffekt ausschauen soll. *Ian Stewart* spricht bei solchen Fällen scherzhaft von "Alptraumspielen" (im Gegensatz zu "Traumspielen"): man weiß zwar, wer gewinnt, aber nicht, wie.

Allerdings weiß man, dass bei Feldern mit ungleichen Seitenlängen stets der gewinnen kann, der die geringere Seitenlänge zu überbrücken hat, auch wenn er als zweiter zieht. Dabei hilft eine Hales-Jewett-Paarung, die in Abbildung 10.1 für das 5×6-Feld gezeigt wird, aber auf $n \times (n+1)$-Felder verallgemeinert werden kann. Bei höheren Differenzen zwischen den Seitenlängen fällt das Gewinnen natürlich noch leichter.

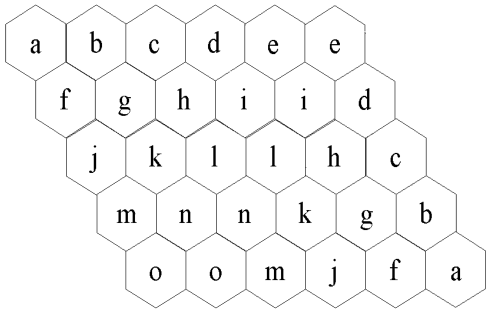


Abbildung 10.1: Hales-Jewett-Paarung für asymmetrisches Hex. Zusammengehörige Felder tragen den gleichen Buchstaben.

Beispiel 2:

Es fällt nicht weiter schwer, dieses Spiel mit Hilfe von Nim-Zahlen und der Mex-Regel zu analysieren, indem man jedem Feld eine Nim-Zahl zuordnet. Felder mit der Nim-Zahl 0 müssen dann gewinnträchtig sein. Das Muster, das sich dabei ergibt, ist im Wesentlichen chaotisch, es gibt aber eine Möglichkeit, die Gewinnstellungen mit Hilfe einer Formel zu errechnen.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	0	4	5	3	7	8	6	10
2	0	1	5	3	4	8	6	7	11
3	4	5	6	2	0	1	9	10	12
4	5	3	2	7	6	9	0	1	8
5	3	4	0	6	8	10	1	2	7
6	7	8	1	9	10	3	4	5	13
7	8	6	9	0	1	4	5	3	14
8	6	7	10	1	2	5	3	4	15
9	10	11	12	8	7	13	14	15	16

Abbildung 10.2: Nim-Zahlen für Wythoffs Spiel

Ein Äquivalent dazu wäre das Chinesische Nim, bei dem 2 Haufen mit Steinen gegeben sind, man aber nicht nur von einem Haufen beliebig viel, sondern auch von beiden gleich viel nehmen darf. Dies kann man einsehen, indem man den Haufen die Koordinaten der Dame auf dem Schachbrett zuordnet. Dem Diagonalzug entspricht dann das Wegnehmen von gleich vielen Steinen bei beiden Haufen. Gewinnstellungen kann man folgendermaßen auffinden:

- Keine 2 Gewinnstellungen dürfen eine gleiche Steinzahl auf einem Haufen aufweisen.

- Keine 2 Gewinnstellungen dürfen eine gleiche Differenz der Steinzahlen aufweisen.

Ersteres verbietet sich, weil man dann durch Wegnehmen von einem Stapel die eine Stellung in die andere überführen könnte, das andere, weil man sonst eine entsprechende Anzahl von beiden Haufen mit dem gleichen Zweck nehmen könnte. Aufgrund der Tatsache, dass die Gewinnstellungen ja minimal sein sollen, ergibt sich folgende Folge von Gewinnstellungen:

$$(0,0); (1,2); (3,5); (4,7); (6,10); (8,13); \ldots$$

Die Differenzen steigen dabei stets um 1 an, und die erste Zahl ist stets die kleinste natürliche Zahl, die noch nicht vorgekommen ist. *Wythoff* hat folgende Formel für die n-te Gewinnstellung gefunden:

$$(a_n, b_n) = (\lfloor \phi n \rfloor, \lfloor \phi^2 n \rfloor), \text{ wobei } \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ϕ ist als die Zahl des goldenen Schnitts bekannt. Sie hat eine besondere Beziehung zu Fünfecken und zur Fibonaccifolge[1], die auch bei den Gewinnstellungen eine Rolle spielt. Fibonaccizahlen kommen nämlich stets paarweise vor: $(1,2); (3,5); (8,13); (21,34); \ldots$. Unglücklicherweise war in der mir zur Verfügung stehenden Quelle kein Beweis für diese Tatsache angegeben, ich konnte jedoch selbst einen finden:

Die Differenzenregel ist schnell bewiesen, denn ϕ ist eine Lösung der Gleichung $x^2 = x + 1$:

$$b_n - a_n = \lfloor \phi^2 n \rfloor - \lfloor \phi n \rfloor = n + \lfloor \phi n \rfloor - \lfloor \phi n \rfloor = n$$

□

[1]Nach Leonardo von Pisa, genannt "Fibonacci". Die Folge ist rekursiv definiert als $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Ihre ersten Glieder sind $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$

Nun muss noch die erste Bedingung bewiesen werden, nämlich dass keine Zahl dabei zweimal vorkommt. Dazu muss gezeigt werden, dass sich jede natürliche Zahl außer 0 als $\lfloor \phi^2 n \rfloor$ oder (ausschließendes oder) $\lfloor \phi n \rfloor$ darstellen lässt. Sei Z eine beliebige positive ganze Zahl.

Z ist genau dann als $\lfloor \phi n \rfloor$ darstellbar, wenn eine natürliche Zahl im Intervall $\left[\frac{Z}{\phi}; \frac{Z}{\phi} + \frac{1}{\phi}\right)$ existiert. Sei $\frac{Z}{\phi} = M + \delta$ mit $M \in \mathbb{N}$ und $\delta \in [0;1)$. Dann gilt obige Bedingung genau dann, wenn $\delta > 1 - \frac{1}{\phi} = \frac{1}{\phi^2}$ gilt. Analog ist Z als $\lfloor \phi^2 n \rfloor$ darstellbar, wenn für $\frac{Z}{\phi^2} = N + \varepsilon$ $(N \in \mathbb{N},\ \varepsilon \in [0;1))$ $\varepsilon > 1 - \frac{1}{\phi^2} = \frac{1}{\phi}$ gilt. δ und ε sind sicher ungleich 0, denn ϕ ist irrational, also gilt wegen $M + N + \delta + \varepsilon = \frac{Z}{\phi} + \frac{Z}{\phi^2} = Z$, dass $\delta + \varepsilon$ ganzzahlig und damit $= 1$ ist. Daraus folgt:

$$\delta > \frac{1}{\phi^2} \iff \varepsilon < 1 - \frac{1}{\phi^2} = \frac{1}{\phi}$$
$$\delta < \frac{1}{\phi^2} \iff \varepsilon > 1 - \frac{1}{\phi^2} = \frac{1}{\phi}$$

Also gilt immer höchstens eine der Bedingungen.

Ausgeschlossen werden muss nur noch der Fall $\delta = \frac{1}{\phi^2}$, $\varepsilon = \frac{1}{\phi}$, denn nur dann würde keine der Bedingungen gelten. Dann wäre jedoch:

$$\frac{Z}{\phi} = M + \frac{1}{\phi^2} \Rightarrow Z\phi = M\phi^2 + 1 \Rightarrow Z\phi = M(\phi + 1) + 1 \Rightarrow \phi = \frac{M+1}{Z-M}$$

Damit wäre jedoch ϕ eine rationale Zahl, was einen Widerspruch darstellt.

Beispiel 3:

Spiele dieser Art nennt man auch Subtraktionsspiele. Nim-Zahlen für die einzelnen Haufengrößen lassen sich geeignet mit einem Nim-Rechenschieber finden, wie er in Abbildung 10.3 gezeigt ist. Als Rechenschieber kann man z.B. ein Lineal präparieren. Man beginnt, indem man der Stellung 0 den Wert 0 zuordnet. Anschließend schiebt man den Rechenschieber so, dass der Pfeil auf das nächste zu beschriftende Feld zeigt. Die Markierungen werden so gewählt, dass sie auf die Stellungen zeigen, die von dort aus zu erreichen sind (in diesem Fall also jene, die durch Wegnahme von 2,3 oder 5 Steinen entstehen). Nun bestimmt man das Mex der Zahlen, auf die die Markierungen zeigen und schreibt es in das Feld. Dann schiebt man den Rechenschieber um ein Feld weiter, ...

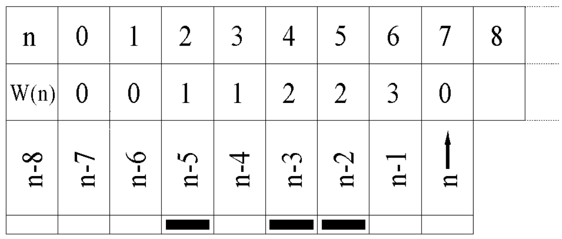


Abbildung 10.3: Wie man einen Nim-Rechenschieber benutzt

Es können dabei stets nur Werte auftreten, die kleiner oder gleich der Anzahl der Wegnahmemöglichkeiten sind. Die Nim-Werte sind für jedes Subtraktionsspiel außerdem allesamt periodisch, da es nur endlich viele Wertekombinationen einer bestimmten Länge gibt und der Rechenschieber ja alles "vergisst", was weiter zurückliegt. In diesem Fall ergibt sich die Periodenlänge 7: $0011223001122300112230011223\ldots$, also ergibt sich wegen $2000 \equiv 5(7)$ für den Haufen der Größe 2000 die Nim-Zahl 2.

Beispiel 4:

Aus 1,2,3 gleichseitigen Dreiecken kann man nur jeweils ein Polyamond bilden, und für diese Figuren lässt sich auch jeweils sehr leicht eine Gewinnstrategie finden, denn schon der erste Zug stellt den Gegner vor unlösbare Probleme. Für alle drei 4-er Polyamonds lässt sich jedoch bereits eine Hales-Jewett-Paarung finden (Abb. 10.4).

Beispiel 5:

Hier kann man wiederum eine ähnliche Idee benutzen. Dazu teilt man das Feld in Dominos ein, wie es in Abbildung 10.5 gezeigt ist. Das Mittelfeld bleibt dabei frei. Rechts kann, da jedes 3×3 Dominos enthält, M auf 6 beschränken, indem er auf jeden Zug des Gegners mit Besetzung des jeweils anderen Feldes des Dominos antwortet. Sollte Links ins Mittelfeld setzen, kann ein beliebiger Zug erfolgen.

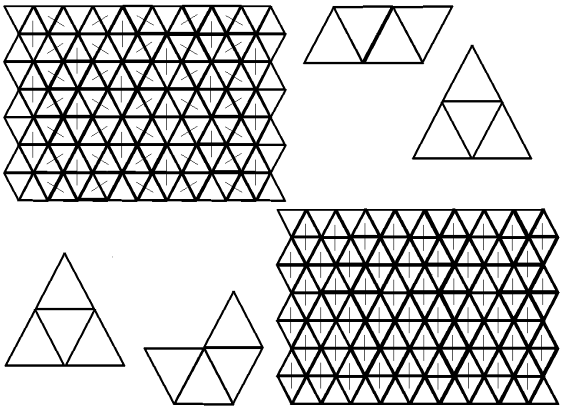


Abbildung 10.4: Hales-Jewett-Paarungen für Polyamonds

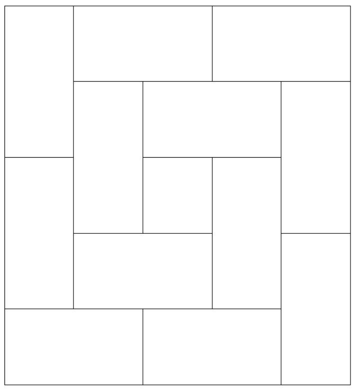


Abbildung 10.5: Einteilung des Spielfelds

Andererseits kann aber Links forcieren, dass M zumindest gleich 6 wird:

Wir führen eine Notation ein, die die Spalten mit a, b, c, d, e bezeichnet, sowie die Zeilen mit 1,2,3,4,5. Links beginnt, indem er seinen ersten 1-er ins Mittelfeld setzt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (aus Symmetriegründen) können wir annehmen, dass der Gegner seine 0 in den Zeilen 1 oder 2 setzt. Diese missachten wir von nun an einfach. Der nächste Zug ist nun $c4$. Wenn Rechts nun nicht auf $c5$ setzt, tut Links dies im nächsten Zug. Daraufhin sind entweder im Feld $(a, b, c) \times (3, 4, 5)$ oder im Feld $(c, d, e) \times (3, 4, 5)$ drei 1-er und kein 0-er. Links kann in dieses Feld damit noch weitere drei 1-er setzen und erreicht $M = 6$. Nun setzt Links in $b3$, $b4$ oder $b5$. Da in $b \times (3, 4, 5)$ noch 2 Felder und in $(a, d) \times (3, 4, 5)$ noch 6 Felder frei sind, kann Links mit Sicherheit im ersten noch einen 1-er und im zweiten noch drei 1-er erzielen. Damit sind nun aber nach Schubfachschluss entweder in $a \times (3, 4, 5)$ oder in $d \times (3, 4, 5)$ am Ende zwei 1-er. Mit den beiden 1-ern aus $b \times (3, 4, 5)$ und den zweien aus $c \times (3, 4, 5)$ sind nun entweder in $(a, b, c) \times (3, 4, 5)$ oder in $(b, c, d) \times (3, 4, 5)$ sechs 1-er.

Damit ist gezeigt, dass bei bester Spielweise $M = 6$ ist.

Beispiel 6:

Eine einfache Hales-Jewett-Paarung führt hier zum Ziel. Da die Anzahl der Felder gerade sein soll, kann man die Felder in Paare nebeneinanderliegender Felder einteilen. Wenn nun A in ein Feld setzt, so setzt B denselben Buchstaben in das jeweils andere Feld des Paares. Damit muss dann am Ende neben jedem M auf zumindest einer Seite ein weiteres M stehen. Die Konfiguration "OMO" enthält jedoch ein M, eingeschlossen von 2 O's. Also kann B ein Unentschieden forcieren.

Diese einfache Lösung wurde auch von vielen Teilnehmern gefunden, manche wählten eine kompliziertere Variante, die darauf aufbaut, dass die Züge am Mittelpunkt des Kreises gespiegelt werden, und hatten damit Erfolg. Interessant wäre jedoch noch eine allgemeine Betrachtung dieses Spiels, für beliebige Anzahlen von Feldern. Außerdem könnte B für gerade Anzahlen auch gewinnen. Die Ergebnisse lauten wie folgt:

- Für gerade Anzahlen kann B gewinnen, sofern die Anzahl größer oder gleich 10 ist.
- Für ungerade Anzahlen kann A gewinnen, sofern die Anzahl größer oder gleich 9 oder gleich 3 ist.

Warum ist dies so? Nun, die einzige Strategie, die verfolgt werden kann, besteht nicht darin, Drohungen aufzubauen, denn diese kann der Gegner ja auch nutzen. Die einzige Chance besteht darin, den Gegner in Zugzwang zu bringen.[2] Wie kann nun eine solche Zugzwangposition aussehen? Nun, neben einem Feld, dessen Besetzung erzwungen werden soll, müssen genau ein O und ein leeres Feld sein, sonst könnte man in das Feld stets ein M setzen und gewinnen oder zumindest ungestraft davonkommen. Da das leere Feld auch zur Zugzwangposition gehört, muss auf seiner anderen Seite wieder ein O sein. Damit ist die einzig mögliche Zugzwangposition auch schon vollendet, andere sind höchstens Zusammensetzungen aus mehreren solchen Positionen: O-2 leere Felder-O. Dass sie tatsächlich eine Zugzwangposition ist, davon kann man sich leicht überzeugen: Setzt man einen Buchstaben in eines der beiden Felder, wird dies mit dem jeweils anderen Buchstaben im anderen Feld beantwortet.

Welcher der Spieler kann nun solche Positionen nutzen? Da die Anzahl der freien Felder in genannter Position gerade ist, muss der Spieler, der dadurch verliert, am Zug sein, wenn noch eine gerade Anzahl von Feldern übrig ist. Das ist A, wenn zu Beginn die Anzahl gerade ist, B andernfalls. Es muss den Spielern nur jeweils gelingen, eine solche Position überhaupt aufzubauen. Wir untersuchen nun, wann ihnen dies möglich ist.

Zuerst machen wir folgende Feststellung: Wenn A das Genannte für die Anzahl $2n-1$ nicht gelingt, weil B eine Strategie dagegen hat, dann gelingt es B für die Anzahl $2n$ auch nicht, denn hier kann dann A zu Anfang ein M beliebig setzen und dann die Strategie von B für die Anzahl $2n-1$ benutzen. Dies führt dann sicher auch zum Ziel.

Weiters gewinnt A für $n \geq 9$ (n ungerade), indem er mit einem O beginnt. Er droht dann in beiden Richtungen mit dem Aufbauen einer Zugzwangposition, was B nicht verhindern kann.

Für $n \geq 10$ (n gerade) gewinnt dagegen B, indem er dem Gegner im ersten Zug gegenüber ein O setzt. Sofern nun A nicht gleich strategischen Selbstmord begeht, kann B im nächsten Zug wie A zuvor eine seiner beiderseitigen Drohungen realisieren.

[2]Eine mathematische Begründung dafür wäre etwa: wenn ein Spieler einen Gewinnzug macht, wieso hat sein angenommenermaßen perfekt spielender Gegner diese Chance nicht selbst genutzt? Die einzige Begründung dafür ist, dass sie zu diesem Zeitpunkt noch gar nicht vorhanden war, sie wurde im letzten Zug erzwungenermaßen aufgebaut.

Die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ sind sinnlos, es bleibt übrig, die Fälle $n = 3, 4, \ldots, 8$ zu untersuchen. Für $n = 3$ gewinnt A, indem er einfach ein O setzt. Dies ist bereits die vollständige Zugzwangposition, denn die beiden O's fallen zusammen. Für $n = 4$ kann A unentschieden erzwingen, indem er ein M setzt und im nächsten Zug auf einer der beiden Seiten noch eines. Dann gibt es nicht einmal mehr die theoretische Chance, die Kombination "OMO" noch zu erzeugen. Wegen der oben gemachten Feststellung brauchen wir nur noch zeigen, dass A für $n = 5$ und $n = 7$ nicht gewinnen kann. Zunächst sei $n = 5$. Wir können annehmen, dass A mit einem O beginnt, alles andere wäre im Sinne der Erzeugung einer Zugzwangposition eher kontraproduktiv. Darauf setzt B in eines der gegenüberliegenden Felder ein M. Nun gibt es nur noch 2 nebeneinanderliegende freie Felder (die zur Zugzwangposition dazugehören), aber an deren Enden befinden sich ein O und ein M. Also kann A sein Ziel nicht erreichen. Nun sei $n = 7$. Wieder können wir annehmen, dass mit einem O begonnen wird. Darauf setzt B wiederum ein M in eines der gegenüberliegenden Felder. Im nächsten Zug kann es A nicht vermeiden, dass B in das andere gegenüberliegende Feld noch ein M setzt, denn würde er es mit einem O besetzen, so hätte er damit sofort verloren, da B sofort die Kombination "OMO" bilden kann. Dann jedoch haben wir es wiederum mit 2 Paaren benachbarter Felder zu tun, an deren Enden jeweils ein O und ein M stehen. Wie schon für den Fall $n = 5$ kann A damit seine Zugzwangposition nicht aufbauen.

Beispiel 7:

Dieses Problem scheint sich nun mit unseren Methoden kaum lösen zu lassen. Mit einem netten kleinen Trick kann man es aber in ein äquivalentes Spiel umformen:

Man ordne die Zahlen in einem magischen Quadrat an, wie es Abbildung 10.6 zeigt. Wie man leicht nachprüfen kann, kommen alle Möglichkeiten, aus 3 verschiedenen Zahlen der Menge $1, 2, \ldots, 9$ die Summe 15 zu bilden, als Spalten, Zeilen oder Diagonalen vor. Ersetzt man nun noch "Wegnehmen einer Zahl" durch "Markieren des entsprechenden Feldes mit dem eigenen Symbol", so bemerkt man, dass unser Spiel in Wahrheit nichts anderes ist als ein verstecktes Tic-Tac-Toe. Wie ein jeder - auch ohne große spieltheoretische Vorbildung - weiß, endet dieses uralte einfache Spiel bei bester Spielweise stets unentschieden, also auch unser Spiel, mit dem wir es hier zu tun haben.

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Abbildung 10.6: Ein magisches Quadrat dient zur Umformung

Beispiel 8:

Um diese Aufgabe zu lösen, suchen wir nach Gewinnstellungen. Die erste solche ist eine einzelne Kugel, denn man darf ja nicht mehr als die Hälfte wegnehmen, also in diesem Fall nicht mehr als $\frac{1}{2}$ und damit 0, was im Widerspruch zur anderen Bedingung steht. Von 2 Kugeln aus kann man auf 1 Kugel reduzieren, also ist dies eine Verluststellung. Von 3 Kugeln aus kann man nur auf 2 Kugeln reduzieren, also ist 3 die nächste Gewinnposition. Von 4,5,6 aus kommt man auf diese, von 7 aus nicht mehr, also ist dies die nächste Gewinnstellung. Wir vermuten bereits richtig, dass die allgemeine Formel für Gewinnstellungen $2^k - 1$ lautet, und beweisen dies mit vollständiger Induktion:

Für $k = 1$ ist die Aussage richtig, das haben wir bereits festgestellt. Nehmen wir nun an, unsere Vermutung stimmt für k. Dann ist $2^k - 1$ eine Gewinnstellung. Von den Positionen $2^k, 2^k + 1, \dots 2^{k+1} - 2$ kann man auf diese Gewinnstellung ohne Verletzung der Regeln kommen, indem man $1, 2, 3, \dots 2^k - 1$ Kugeln wegnimmt. Also sind dies lauter Verluststellungen. Doch von $2^{k+1} - 1$ kann man nicht mehr auf $2^k - 1$ reduzieren, da $(2^{k+1} - 1) - (2^k - 1) = 2^k > 2^k - \frac{1}{2} = \frac{2^{k+1}-1}{2}$ ist. Damit ist $2^{k+1} - 1$ die nächste Gewinnstellung, und die Induktion ist abgeschlossen. Der erste Spieler kann folglich alle Positionen gewinnen, außer solchen der Form $2^k - 1$.

Beispiel 9:

Für "Teile und herrsche" müsste es nach der Theorie aus Kapitel 3.3 eine Methode geben, es mittels Nim-Zahlen zu lösen. Dies ist jedoch eher kompliziert und umständlich, und daher versucht man es mit Hilfe von Gewinnpositionen. Die abschließende Gewinnposition lautet $(1, 1)$, denn dann kann keiner der Inhalte noch geteilt werden. Ich behaupte nun, dass all jene Positionen mit 2 ungeraden Anzahlen Gewinnpositionen sind. Dazu genügt es zu zeigen, dass man von jeder Verlustposition in zumindest eine Gewinnposition gelangen kann und von einer Gewinnposition nur in eine Verlustposition.

Zunächst der erste Teil: Nach unserer Behauptung muss jede Verlustposition zumindest eine gerade Anzahl enthalten. Die andere Schachtel leert man, die gerade Anzahl kann man stets in zwei ungerade zerlegen. Umgekehrt kann man ungerade Anzahlen nur in einen geraden und einen ungeraden Summanden zerlegen, sodass nach dem Zug von einer Gewinnposition aus eine Verluststellung entstehen muss. Damit ist die Theorie bestätigt. Das Spiel mit 1999 und 2000 Steinen gewinnt folglich der beginnende Spieler, indem er die 1999 Steine wegwirft und die übrigen in z.B. 1 und 1999 zerlegt.

Beispiel 10:

Wie für Beispiel 3 hilft eine Art Rechenschieber, der jedoch etwas komplizierter ausfällt, da zusätzlich zur aktuellen Punktsumme noch die momentane Stellung des Würfels miteinbezogen werden muss. Deshalb verwendet man eine Tabelle, bei der in den Spalten die Stellungen (1,6), (2,5) und (3,4) (diese sind jeweils gleichwertig, denn da sie auf dem Würfel gegenüber liegen, sind von ihnen aus die gleichen Züge möglich) betrachtet werden, in den Zeilen die jeweilige Punktsumme. Man nimmt außerdem anstelle der Punktsumme die Differenz zur vereinbarten Endsumme, sodass wie beim Nim-Rechenschieber mit 0 begonnen werden kann. Weiters hat man 3 sogenannte Strategiekarten, eine (1,6), eine (2,5) und eine (3,4) Karte, die jeweils für die 3 möglichen Arten von Feldern verwendet werden. In diese werden Löcher so gemacht, dass das erste Loch über dem zu beschriftenden Loch liegt, und die weiteren genau über den Stellungen, die aus den jeweils möglichen Zügen resultieren. In Felder, die Gewinnpositionen darstellen, wird G geschrieben. Taucht in einem der Löcher ein G auf, so schreibt man den entsprechenden Zug in das noch leere Feld ein. Wenn nicht, muss dieses Feld wieder eine Gewinnposition sein, und man trägt ein G ein. So geht man mit den drei Karten nacheinander für die drei Felder einer Zeile vor und erhält eine lange Folge, in der die einzelnen Gewinnstellungen und alle Gewinnzüge eingetragen sind. Die

Abbildung 10.7 zeigt ein solches Vorgehen mit einer Strategiekarte.

Die Folge, die sich ergibt, ist periodisch mit der Periodenlänge 9. Da $30 \equiv 3(9)$ ist, kann der beginnende Spieler laut Tabelle durch Auflegen der Zahl 3 gewinnen . Ähnlich kann man das Problem für einen tetraedischen Würfel lösen. Dabei ergibt sich die Periodenlänge 10. Es muss sich bei jedem wie immer gearteten Würfel (auch unregelmäßiger Natur) eine Periode ergeben, mit der gleichen Begründung wie für Subtraktionsspiele (Bsp. 3). Etwa für den Dodekaeder erhält man die Periode 26.

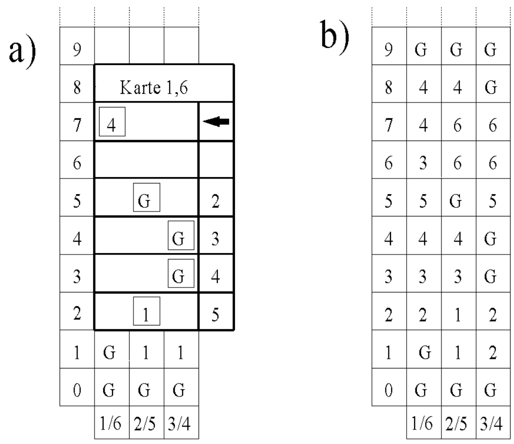


Abbildung 10.7: a) Anwendung der Strategiekarte, b) die fertige Tabelle

Beispiel 11:

Wie beim Hex (Bsp. 1) handelt es sich hierbei um ein Alptraumspiel, auch wenn es auf den ersten Blick aussieht wie das aus Kapitel 4.1. Man weiß, dass Alice, die beginnt, auch gewinnen kann, und dafür gibt es auch einen schönen Beweis:

Angenommen, Bob hätte eine Gewinnstrategie. Dann kann Alice beginnen, indem sie das eine Stück in der rechten unteren Ecke wegnimmt. Nun muss Bob über einen Gewinnzug verfügen, denn er hat ja laut Annahme eine Gewinnstrategie. Diesen Gewinnzug hätte aber Alice sicher auch schon im ersten Zug machen können, und damit hätte sie eine Gewinnstrategie. Dieser Widerspruch beweist, dass nur Alice eine Gewinnstrategie haben kann. Außer für ganz spezielle Fälle (Für $n \times n$-Quadrate etwa besteht der Gewinnzug zu Beginn darin, rechts unten ein $(n-1) \times (n-1)$-Quadrat abzubrechen.

Dann bleibt noch eine Art L-Stück mit gleich langen Armen übrig. Nun kann Alice jeden Zug von Bob am jeweils anderen Arm nachahmen) ist aber diese Gewinnstrategie noch nicht bekannt.

Beispiel 12:

Eine einfache Symmetrie-Überlegung ergibt $D = 2$. Links kann dies erreichen, indem er zuerst ein Kreuz in das mittlere Feld setzt. Anschließend spiegelt er jeden Zug von Rechts am Mittelpunkt. Nun gibt es zu jeder Zeile und Spalte, in der die Kreise in der Überzahl sind, eine gegenüberliegende Zeile bzw. Spalte, in der es mehr Kreuze gibt. Ausnahmen bilden die Zeile und die Spalte durch den Mittelpunkt. In diesen gibt es zu jedem Kreis ein Kreuz, das gegenüberliegt, und dazu noch das eine Kreuz in der Mitte. Also sind in diesen die Kreuze in der Mehrzahl. Diese Spalte und diese Zeile geben den Ausschlag zugunsten von Links, und $D = 2$. Andererseits kann Rechts verhindern, dass D größer wird. Er spiegelt seinerseits jeden Zug des Gegners an der Mitte, und sofern dies nicht möglich ist, setzt er seinen Kreis beliebig, denn schaden kann ihm das ja nicht. Mit der gleichen Argumentation wie für den ersten Teil erzielt Rechts damit, dass in der Hälfte aller Zeilen und Spalten mehr Kreise vorhanden sind als Kreuze, ausgenommen vielleicht die mittlere Zeile bzw. Spalte. Dann ist jedoch D auch nur gleich 2.

Beispiel 13:

Dieses Spiel ist nach einer Schule in Großbritannien benannt, und es wurde von *Ian Stewart* in "Scientific American" (deutsche Ausgabe: "Spektrum der Wissenschaft") besprochen. *Peter Dolland* hat in einem Leserbrief eine allgemeine Strategie für Alice vorgezeigt, die stets funktioniert, wenn es im offenen Intervall $\left(\frac{n}{4}; \frac{n}{3}\right)$ wenigstens 3 verschiedene Primzahlen p_1, p_2, p_3 gibt. Dieses Kriterium ist für $111 \leq n \leq 115$, $n = 123$, $129 \leq n \leq 171$ sowie $n \geq 177$ gültig, wobei letztere Behauptung nicht sicher wahr ist, da über die Verteilung von Primzahlen ja so gut wie nichts bekannt ist. Es besteht aber Grund zur Vermutung, dass das Kriterium tatsächlich für alle $n \geq 177$ erfüllt ist. Die Strategie für Alice sieht dann aus wie in Abbildung 10.8 gezeigt.

Im zweiten Zug hat Bob eine Wahlmöglichkeit, die einzige überhaupt, die beiden Möglichkeiten werden separat behandelt. Muss Bob 1 nehmen, dann ist es damit um ihn geschehen, denn Alice nimmt darauf einfach eine große Primzahl, d.h. eine solche die größer als $\frac{n}{2}$ ist. Nach dem Bertrand'schen Postulat, demzufolge es zwischen m und $2m$ stets zumindest eine Primzahl gibt, existiert eine solche große Primzahl sicher immer.

Zug	Alice	Bob	Alice	Bob
1	$2p_3$			
2		p_3		2
3	$3p_3$		$2p_2$	
4		3		p_2
5	$3p_2$		$3p_2$	
6		p_2		3
7	$2p_2$		$3p_1$	
8		2		p_1
9	$2p_1$		$2p_1$	
10		p_1		1
11	$3p_1$			
12		1		

Abbildung 10.8: Die Strategie für Alice

Auch wenn die genannte Gewinnstrategie nicht absolut sicher ist, da es ein größeres n geben kann, für das das Kriterium nicht erfüllt ist, so konnte ich wenigstens ein Theorem beweisen, nämlich das "Gesetz von der Primzahl":

> Wenn $p > 3$ eine Primzahl ist, dann geht das Spiel mit p Karten gleich aus wie mit $p - 1$ Karten.

Die Begündung ist die, dass die Primzahl p sicher eine große Primzahl ist. Wie wir bereits bewiesen haben, gibt es für $p - 1$ auch schon eine solche, und die ist noch immer eine große Primzahl, denn wenn sie größer als $\frac{p-1}{2}$ ist, so ist sie zumindest gleich $\frac{p+1}{2}$, denn $\frac{p-1}{2}$ ist eine ganze Zahl (p muss ja eine ungerade Zahl sein). Damit ist sie aber auch größer als $\frac{p}{2}$ und auch für das Spiel mit p Karten eine große Primzahl. Die zusätzliche große Primzahl kann aber nicht genutzt werden, denn es kann im gesamten Spiel überhaupt nur einmal eine große Primzahl vorkommen, und zwar am Ende, nach der 1. Somit ändert die zusätzliche Karte am Ergebnis nichts.

Eine Analyse für $n \leq 20$ ergibt außerdem, dass Alice dabei für $n = 3$, 8, 12, 13, 14, 16, 17 und 20 gewinnen kann, für alle übrigen gewinnt Bob.

Beispiel 14:

Wenn die Eisverkäufer zu Beginn an den Enden des Strandes stehen, dann können sie ihren Einflußbereich dadurch vergrößern, dass sie ihren Eisstand näher zur Mitte verschieben. Denn dadurch, dass sie sich dem Konkurrenten nähern, verschiebt sich der geometrische Mittelpunkt ihrer Stände zu diesem hin, wordurch der eigene Einflußbereich größer wird. Wenn beide Eisverkäufer diese Strategie verfolgen (und das müssen sie, wenn sie rational handeln), so wird als Endergebnis der Fall sein, dass beide genau in der Mitte des Strandes nebeneinander zu stehen kommen, wo sie sich den Markt schließlich doch wieder gleichmäßig aufteilen. Das Bemerkenswerte daran ist, dass diese Konfiguration für die Kunden schlechtestmöglich ist, denn ihr durchschnittlicher Weg beträgt dabei $\frac{1}{4}$ der Strandlänge, gleich wie bei der Ausgangsposition an den Rändern. Würden sie sich auf $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ des Strandes aufstellen, so wäre der durchschnittliche Weg für die Kunden nur $\frac{1}{8}$, und der Gewinn für die Eisverkäufer bliebe gleich. Ein weiteres Beispiel, dass rationale Vorgehensweise nicht immer zum besten Ergebnis führt.

Ein Analogon dazu ist die Politik: Man stelle sich 2 Parteien vor, nennen wir sie Formalisten und Konformisten, die sich ihre Position in der politischen Landschaft zwischen links und rechts suchen müssen: Jeder Wähler wählt die Partei, die seiner Ideologie am nächsten kommt. Die beiden Parteien werden sich mit der Zeit mehr und mehr zur politischen Mitte hin begeben. Dieser Prozess ist zwar hier sehr vereinfacht beschrieben, und manches daran ist in der wirklichen Politik ja nicht so einfach (Kaum ein Wähler wählt direkt nach Ideologie, es werden einzelne Programme der Parteien gewählt. Darüber hinaus sind die Meinungen der Wähler ja nicht gleichmäßig verteilt.), aber die Realität gibt der Spieltheorie recht: In den Vereinigten Staaten, wo es im Wesentlichen ein 2-Parteien-System gibt, kann man kaum einen ideologischen Unterschied zwischen Demokraten und Republikanern feststellen, beide wollen die goldene Mitte sein. In Europa ist die Sachlage allerdings deutlich komplizierter, weil es mehr Parteien gibt, doch auch hier macht sich ein ähnlicher Trend bemerkbar, wohl aber auch deshalb, weil sich der Radikalismus in der Vergangenheit nicht bewährt hat.

Beispiel 15:

Die Methode, die wir in Kapitel 5 kennengelernt haben, hilft uns zumindest, die rationale Strategie für dieses Spiel zu finden. Wenn es eine optimale Strategie gibt, so wird sie von allen gespielt. Da die Strategie dann genau zutreffen sollte, muss für die getippte Zahl dann $A = \frac{2}{3}A$ gelten, und damit ist $A = 0$. Die einzige rationale Entscheidung, die man treffen kann, ist also, 0 zu wählen - unter der Annahme, dass die Gegner allesamt auch perfekt rational sind. Aber was, wenn sie es nicht sind? Im wirklichen Leben kann man kaum annehmen, dass alle perfekt rational handeln.

Dieses Spiel wurde als Experiment im mehreren Zeitungen und Zeitschriften durchgeführt, unter anderem in "Financial Times" und "Spektrum der Wissenschaft". Dabei wurde jeweils ein Preis für den Sieger ausgesetzt. Das Ergebnis zeigte, dass zwar manche Überlegung angestellt wurde, aber nicht alle von ihnen wirklich perfekt rational waren. Spezielle Häufungen traten bei den Zahlen 0 (einige waren tatsächlich so "perfekt"), 33 ($\frac{2}{3}$ des Durchschnitts aller Zahlen von 0 bis 100), 22 ($\frac{2}{3}$ von 33), aber auch bei 66 und 100 (was man auch als Schummelversuch interpretieren kann: tatsächlich sandten manche 100mal die Zahl 100 ein, in der Hoffnung, den Schnitt auf die von ihnen getippte Zahl 66 zu bringen). Die Gewinnzahlen lagen bei Teilnehmerzahlen zwischen 1500 und 4000 etwa um 15 (zwischen 12,5 und 17). Daraus können nun Rückschlüsse über das rationale Verhalten von Menschenmassen gezogen werden, womit ein Schritt zur praktischen Anwendung theoretischer Prinzipien in der Spieltheorie getan ist.

Beispiel 16:

Mit der Regel aus Kapitel 7 können wir den Wert dieser Lotterie finden. Die Wahrscheinlichkeit, dass beim ersten Wurf "Zahl" erscheint, ist $\frac{1}{2}$, dafür, dass beim zweiten Wurf erstmals Zahl erscheint, ist $\frac{1}{4}$ (die Wahrscheinlichkeit für die Kombination Kopf-Zahl), für den dritten Wurf beträgt sie $\frac{1}{8}$, ..., für den k-ten Wurf $\frac{1}{2^k}$. Also ist der Wert dieser Lotterie

$$\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \ldots + \frac{1}{2^k} \cdot 2^k + \ldots = 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$$

Man sollte also unendlich viel zahlen, um an dieser Lotterie teilnehmen zu dürfen? Wohl niemand würde das tun, selbst wenn er wirklich unbegrenzt viel Geld hätte, er kann ja nicht einmal unendlich viel Geld gewinnen, denn dann würde auch die Lotterie unendlich lang dauern. Wie lässt sich dieses Paradoxon nun auflösen? Indem wir eine Nutzensfunktion einführen. Wir sind risikoabweisend, unsere Nutzensfunktion ist konkav, nehmen wir wieder das Beispiel $N(x) = \sqrt{x}$ her.

Der Nutzen der Lotterie ist dann, unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe,

$$\begin{aligned}
G &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}+\frac{1}{4}\cdot\sqrt{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}\cdot\sqrt{2^k}+\ldots \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2}^k}+\ldots \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}-1}=1+\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Nun muss man nur noch jenen Betrag finden, der bei derselben Nutzensfunktion den gleichen Nutzen ergibt. Für ihn muss gelten, dass $\sqrt{x}=1+\sqrt{2}$ ist, und damit ist $x=3+2\sqrt{2}\approx 5,83$. Eine Person mit dieser Nutzensfunktion würde also nur 5,83$ zahlen, um an der Lotterie teilnehmen zu dürfen. Für die Nutzensfunktion $N(x)=\ln x$ würde sich etwa der (übrigens bemerkenswert "schöne") Wert von 4$ ergeben.

Beispiel 17:

Die Gewinnmatrix für dieses Spiel sieht folgendermaßen aus:

		Clyde	
		gestehen	leugnen
Bonnie	gestehen	1 1	0 5
	leugnen	5 0	3 3

Abbildung 10.9: Gewinnmatrix für das Gefangenendilemma

Als Gewinnpunkte wird hierbei der Abzug von der Höchststrafe - 5 Monate - gewertet. Wir erkennen sofort ein Gleichgewicht dominanter Strategien, nämlich (gestehen, gestehen), und schließen, dass die einzig vernünftige

Möglichkeit für beide ist, zu gestehen und damit den Kollegen zu verraten. Es ergibt sich eine Situation, die uns nur zu gut bekannt ist: Der gemeinsame Gewinn wird dadurch minimal.

Was aber, wenn die beiden nun - theoretisch - unendlich oft gegeneinander antreten und jeweils das mit in ihre Überlegungen miteinbeziehen können, was der Gegner bis jetzt getan hat? Man kann nun Langzeitstrategien finden, wie etwa:

- Gut: leugnet - kooperiert also - immer
- Böse: gesteht - betrügt also - immer
- Periodisch: Leugnet und gesteht abwechselnd
- Tit-for-Tat: leugnet zuerst und tut dann das, was der Gegner beim letzten Mal getan hat
- Grimmig: leugnet so lange, bis der Gegner erstmals gesteht. Ab diesem Zeitpunkt gesteht er immer, womit er gegen den betrügerischen Gegner vorgeht.
- Mehrheitsentscheid: tut das, was der Gegner bis jetzt am häufigsten getan hat. Bei Gleichstand und zu Beginn leugnet er.

Nun kann man mehrere Strategien gegeneinander und gegen sich selbst antreten lassen und eine Siegerstrategie bestimmen - jene, die die meisten Punkte erzielt. Ein mögliches solches Turnier sieht etwa folgendermaßen aus:
In die Felder werden die Punkte eingetragen, die die jeweilige Strategie gegen die jeweils andere im Durchschnitt bei unendlicher Anwendung erzielt. Die Strategien sind dabei folgende:

1. Gut
2. Böse
3. Periodisch
4. Tit-for-Tat
5. Grimmig
6. Mehrheitsentscheid
7. Periodisch böse: leugnet - gesteht - gesteht

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	0	$\frac{3}{2}$	3	3	3	1	2	3	3
2	5	1	3	1	1	1	$\frac{7}{3}$	$\frac{11}{3}$	1	1
3	4	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{5}{3}$	$\frac{17}{6}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$
4	3	1	$\frac{5}{2}$	3	3	3	2	$\frac{8}{3}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$
5	3	1	3	3	3	3	$\frac{7}{3}$	$\frac{11}{3}$	1	1
6	3	1	$\frac{3}{2}$	3	3	3	$\frac{7}{3}$	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$
7	$\frac{13}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	3	2	$\frac{2}{3}$
8	$\frac{11}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	$\frac{8}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{11}{3}$
9	3	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{8}{3}$	1	1
10	3	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{3}$	2	1	1

Abbildung 10.10: Krieg der Strategien

8. Periodisch gut: leugnet - leugnet - gesteht
9. Misstrauisches Tit-for-Tat: wie Tit-for-Tat, gesteht jedoch beim ersten Mal
10. Misstrauischer Mehrheitsentscheid: wie Mehrheitsentscheid, gesteht jedoch bei Gleichstand und beim ersten Mal

Das Ergebnis dieses Turniers sieht wie folgt aus:

1. Tit-for-Tat $25\frac{1}{6}$
2. Grimmig 24
3. Mehrheitsentscheid $23\frac{5}{6}$
4. Periodisch 23
5. Periodisch gut $22\frac{2}{3}$
6. Gut $22\frac{1}{2}$
7. Böse 20
8. Misstrauisches Tit-for-Tat $19\frac{1}{6}$
9. Misstrauischer Mehrheitsentscheid $18\frac{5}{6}$
10. Periodisch böse $18\frac{1}{6}$

Aus diesem Ergebnis kann man nun einige Schlüsse ziehen, wie eine gute Strategie auszusehen hat:

- Sie soll eine positive Grundeinstellung haben, also nicht unprovoziert betrügen.
- Sie soll reaktiv sein, also auf das reagieren, was der Gegner tut.

- Sie soll nicht besonders listig sein. Eine einfache, durchschaubare Strategie wie Tit-for-Tat erzielt bessere Ergebnisse als kompliziertere Strategien (wie Mehrheitsentscheid)

Kann es nun eine beste Strategie geben?

Das kommt darauf an, was man darunter versteht. Soll es eine Strategie sein, die gegen niemanden im direkten Duell verliert, lautet die Antwort ja: Böse erfüllt diese Bedingung.

Es gibt aber keine Strategie, die gegen jede andere das bestmögliche Ergebnis erzielt. Eine solche müsste nämlich als erstes gestehen, sonst gerät sie gegenüber Böse in einen unaufholbaren Rückstand. Allerdings fährt sie damit gegen Grimmig schlecht - deutlich schlechter als die einfache Strategie Gut.

Wie kann man dieses Spiel anwenden?

Man kann eine bemerkenswerte Verbindung zur Biologie knüpfen: Man sieht die Strategien als Lebewesen an, die eine gewisse Überlebensstrategie verfolgen. Diese kann aggressiv wie zurückhaltend sein. Nun lässt man sie wie in der Natur gegeneinander antreten. Die Strategien sollen eine gewisse Population zu Beginn aufweisen und abhängig vom erzielten Ergebnis sich vermehren oder verringern. Damit kann man die Evolution in ihren Grundzügen nachvollziehen und Schlüsse ziehen, welche Strategien die Evolution bevorzugt. Es zeigt sich etwa, dass anpassungsfähige Strategien wie Tit-for-Tat freundliche wie feindselige Umwelten überleben, dass weniger aggressive Strategien auf Dauer eher durchkommen, und dass aggressive Strategien zwar anfangs rasende Vermehrung zeigen, aber sich dann selbst ausschalten, was bis zum Aussterben gehen kann. Ein Paradebeispiel aus der Realität für eine aggressive Strategie wäre der Mensch. Was soll man nun davon halten?

Anhang A

Einige bedeutende Spieltheoretiker

Elwyn R. Berlekamp, geboren 1940 in Dover (Ohio), seit 1971 Professor für Mathematik, Elektrotechnik und Computerwissenschaften in Berkeley; Mitverfasser von "Winning Ways"

John H. Conway, geboren 1937 in Liverpool (England), Dozent für Mathematik an der University of Cambridge, Gastprofessor an mehreren Universitäten; Verfasser von "On Numbers and Games" und Mitverfasser von "Winning Ways"

Richard K. Guy, geboren 1916 in Nuneaton (England), seit 1965 Professor für Mathematik an der University of Calgary, Herausgeber der Sektion für ungelöste Probleme bei American Mathematical Monthly; Mitverfasser von "Winning Ways"

John Harsanyi, geboren 1920 in Budapest (Ungarn), studierte zunächst Philosophie, dann Ökonomie, seit 1964 Professor an der University of California in Berkeley; forscht auf dem Gebiet der Verhandlungstheorie und der nutzentheoretisch begründbaren Ethik, Nobelpreis 1994 gemeinsam mit Nash und Selten

Oskar Morgenstern, geboren 1902 in Görlitz (Deutschland), gestorben 1977 in Princeton, lehrte bis 1938 als Professor der Nationalökonomie in Wien, danach in Princeton (bis 1970) und New York; Verfasser der grundlegenden Monographie "Theory of Games and Economic Behavior"

John F. Nash, geboren 1928 in Bluefield (Virginia), studierte in Princeton bei A. W. Tuckers, wo er später Professor wurde; von ihm stammt das

Fundament für die Theorie nichtkooperativer Spiele, Nobelpreis 1994 gemeinsam mit Harsanyi und Selten

John v. Neumann, geboren 1903 in Budapest (Ungarn), gestorben 1957 in Washington D.C., wirkte zunächst als Privatdozent in Göttingen, Berlin und Hamburg, ab 1933 als Professor in Princeton; Verfasser der grundlegenden Monographie "Theory of Games and Economic Behavior"

Reinhard Selten, geboren 1930 in Breslau (Deutschland), Professor für wirtschaftliche Staatswissenschaften zunächst in Berlin und Bielefeld, ab 1984 in Bonn; verfasste eine Magisterarbeit über ein Thema der kooperativen Spieltheorie, Nobelpreis 1994 gemeinsam mit Harsanyi und Nash

Literaturverzeichnis

[1] E.R. Berlekamp, J.H. Conway, R. Guy, "*Gewinnen. Strategien für mathematische Spiele*", Bände 1-4, Verlag Vieweg, Braunschweig 1985

[2] K. Binmore, "*Fun and Games. A Text on Game Theory*", D. C. Heath and Company, Lexington/Massachusetts 1992

[3] A. Mehlmann, "*Wer gewinnt das Spiel?*", Verlag Vieweg, Braunschweig 1997

[4] H.C. Reichel u.a., "*Lehrbuch der Mathematik*", Band 7 u. 8, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1992

[5] I. Stewart, "*Die gekämmte Kugel*", Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 1997

[6] I. Stewart, "*Die Reise nach Pentagonien*", dtv, München 1998

[7] J.-P. Delahaye, P. Mathieu, "*Altruismus mit Kündigungsmöglichkeit*" in *Spektrum der Wissenschaft*, Februar 1998, S. 8-14

[8] R. Selten, R. Nagel, "*Das Zahlenwahlspiel - Ergebnisse und Hintergrund*" in *Spektrum der Wissenschaft*, Februar 1998, S. 16-22

[9] I. Stewart, "*Zahlen wegnehmen*" in *Spektrum der Wissenschaft*, März 1998, S. 8-9

[10] I. Stewart, "*Spiele mit Seifenschokolade*" in *Spektrum der Wissenschaft*, August 1999, S. 102-103

Index

Baumdiagramm, 11
Berlekamp'sche Regel, 23
Bimatrix, 59

Einfachheitsregel, 20

Gewinnmatrix, 59
Gewinnstellung, 38
Gewinnstrategie, 8
Gewinnwert, 46
Gleichgewicht
    dominanter Strategien, 59

Hales-Jewett-Paarung, 33

Information
    vollstandige, 8

Konvention
    übliche, 7

Langzeitstrategie, 70
Links, 7
Lotterie, 51

Mex-Regel, 31

Nash-Gleichgewicht, 61
Nim-Zahl, 29
normierte Form eines Spiels, 7
Nullposition, 17
Nullsummenspiel, 46
Nutzensfunktion, 54

Pareto-effizient, 64
Polyamond, 37
Polyomino, 35
Position, 7

Rückwärtsinduktion, 39
Rechts, 7
risikoabweisend, 54
risikoliebend, 54
risikoneutral, 55

Spiel
    kooperatives, 63
    neutrales, 28
Spieltheorie
    ökonomische, 5
    kombinatorische, 5
Strategie, 5
    dominante, 59
Subtraktionsspiel, 74
Summe
    zweier Spiele, 31

unscharf, 29

Verluststellung, 39

Zufallszug, 8

Schülerprotokoll

Schuljahr 1997/98	Idee zur Fachbereichsarbeit
Schuljahr 1998/99	Beschaffung entsprechender Literatur und Beschäftigung mit dem Thema
Ende des Schuljahrs 1998/99	Erste Gespräche mit Fr. Prof. Trathnigg zu Einteilung und Themen der FBA
25.7.-1.8.1999	Erstellen der Erstfassung der FBA
16.9.1999	Ersuchen um Bewilligung der FBA
28.9.1999	Übermittlung der Erstfassung an Fr. Prof. Trathnigg
18.10.1999	Genehmigung durch den Landesschulrat
11.11.1999	Kurze Besprechung mit Fr. Prof. Trathnigg zum Thema Schwerpunktsetzung
20.11.1999	Besprechung mit Fr. Prof. Trathnigg betreffend Korrekturen und Änderungen
9.12.1999	Vorlage von diversen Korrekturen
Weihnachtsferien 24.12.1999-6.1.2000	Letzte Erweiterungen
10.1.2000	Übergabe der Neufassung an Fr. Prof. Trathnigg
10.1.-14.2.2000	Weitere kurze Besprechungen
28.2.2000	Abgabe der Arbeit

Erklärung des Schülers

Ich erkläre, dass ich diese Fachbereichsarbeit selbst verfasst habe und dass außer der angegebenen Literatur keine weitere verwendet wurde.

Stephan Wagner